

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ  
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК

5

ОБЪЕДИНЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР  
1936

---

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

---

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ  
МАТЕМАТИКЕ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО

*ВЫПУСК ПЯТЫЙ*

ОБЪЕДИНЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ  
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

Сборники „Математическое просвещение“ содержат статьи по элементарным разделам математики, по методике и истории математики, отделы текущей жизни, задач, библиографии и т. д.

Сборники рассчитаны на учащуюся молодежь и преподавателей средних школ, рабфаков, техникумов и других учебных заведений.

Редакция обращается ко всем читателям с просьбой присылать свои пожелания и отзывы по адресу: Б. Комсомольский пер., 6, пом. 5. В редакцию „Математического просвещения“.

Редакция Р. Н. Бончювского Оформление С. Л. Дыман  
Корректурa О. Н. Барашиковой Выпускающий Я. Я. Вигант  
Сдано в производство 20/VI 1935 г. Подписано к печати 9/VI 1936 г.  
Листов 7 Тираж 5 000 Формат 62х94 $\frac{1}{4}$  Печ. зн. в л. 43 904  
Заказ № 3129 Гл. ред. общетехн. лит. № 78а Уполн. Главлита № В 39764

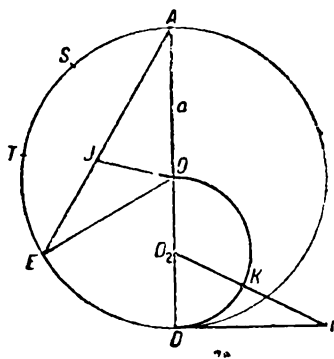
5-я тип. Трансжелдориздата НКПС, Москва, Каланчевская улица, Каланчевский тупик, дом 3/5.

# ПОСТРОЕНИЯ ИКОСАЭДРА И ДОДЕКАЭДРА <sup>1</sup>

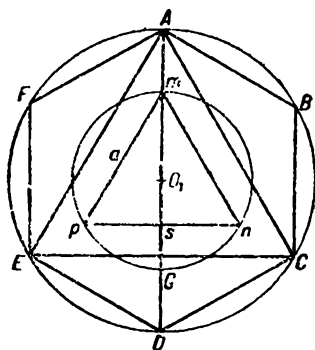
А. Д. Ванюшин (с. Теньки)

## 1. ПОСТРОЕНИЕ ИКОСАЭДРА <sup>1</sup>

Из центра  $O$  радиусом  $OA=a$  (фиг. 1), равным ребру икосаэдра, описываем окружность и находим длину  $KI$  стороны вписанного в эту окружность правильного десятиугольника.

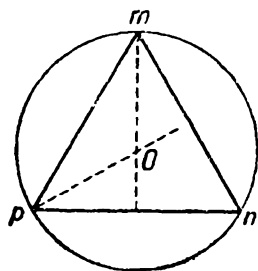


Фиг. 1.



Фиг. 2.

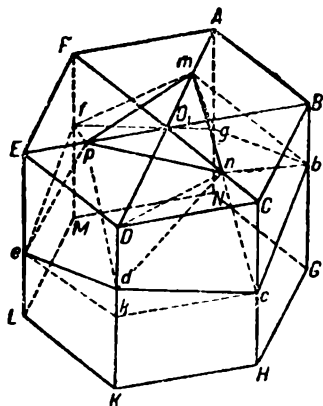
От произвольной точки  $A$  на окружности  $O$  откладываем хорды  $AS = ST = TE = KI$  и проводим хорду  $AE$ . Далее, строим правильный треугольник  $ACE$  (фиг. 2), сторона которого равна  $AE$ , и вокруг него описываем окружность. В эту окружность вписываем правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Строим затем правильный треугольник  $mnp$  (фиг. 3) со стороной, равной ребру икосаэдра, и описываем вокруг этого треугольника окружность. Таковую же окружность чертим на фиг. 2 концентрически с окружностью, описанной около треугольника  $ACE$ , и вписываем в нее тот же треугольник  $mnp$  так, чтобы его вершина лежала на одном из диаметров шестиугольника  $ABCDEF$ , например на  $AD$ .



Фиг. 3.

<sup>1</sup> Наиболее известными способами построения икосаэдра и додекаэдра являются способы Евклида и Паппа. Построения, предлагаемые автором этой статьи, отличаются не меньшими достоинствами. Они очень просты и наглядны. Прим. ред.

Далее, построим правильную шестиугольную призму, основанием которой служит шестиугольник  $ABCDEF$ , а высотой  $AN = AO_1 + O_1m$  (фиг. 2). На верхнем ее основании чертим треугольник  $mnp$  так, как показано на фиг. 2. Этот треугольник будет



Фиг. 4.

одной из граней икосаэдра. Другую грань получим, повторив то же построение на нижнем основании призмы, но так, чтобы нижний треугольник  $m_1n_1p_1$  по отношению к верхнему был повернут на  $180^\circ$  вокруг оси призмы. Дальнейшее построение видно на фиг. 4. На ребрах  $AN$ ,  $CH$  и  $EL$ , лежащих против вершин треугольника  $mnp$ , откладываем отрезки  $Ag$ ,  $Cc$  и  $Ee$ , равные радиусу  $O_1A$  окружности  $ABCDEF$ , а на остальных боковых ребрах — отрезки  $Bb$ ,  $Dd$  и  $Ff$ , равные радиусу  $O_1m$  круга, описанного вокруг треугольника  $mnp$ . Точки  $b, c, d, e, f, g$  будут служить вершинами икосаэдра.

Остальные его вершины лежат на основаниях призмы в точках  $t, n, p, m_1, n_1, p_1$ . Срезая призму плоскостями, проходящими через вершины треугольников  $rdn$ ,  $dnc$ ,  $cnb$  и т. д., получаем икосаэдр.

### Доказательство правильности построения

На фиг. 1 проведем радиусы  $OA$  и  $OE$  и на стороне  $AE$  треугольника  $AOE$  отложим  $AI = OA$ . Соединим точку  $I$  с точкой  $O$ . В треугольнике  $AOE$  угол  $A$  равен углу  $E = 36^\circ$ , откуда легко видеть, что  $\angle EOI = 36^\circ = \angle IEO$  и  $\triangle EIO \sim \triangle AOE$ . Из подобия треугольников  $EIO$  и  $AOE$  имеем:

$$\frac{AE}{a} = \frac{a}{AE - a}.$$

Пусть  $AE = x$ ; тогда

$$x^2 - ax - a^2 = 0,$$

$$x = AE = \frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2}. \quad (1)$$

На фиг. 2:

$$AO_1 = AE : \sqrt{3} = \frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2\sqrt{3}} = \frac{a(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{6}, \quad (2)$$

$$O_1m = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad (3)$$

С помощью той же фиг. 2 нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} Dn = Dp = Fp = Fm = Bm = Bn = \\ = \sqrt{(Ds)^2 + (ns)^2} = \sqrt{\left(AO_1 - \frac{O_1 m}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}} = \\ = \sqrt{\left[\frac{a(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right]^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 15}{36} + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{3} a \sqrt{6}; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cn = Am = Ep = O_1 A - O_1 m = \\ = \frac{a(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{6}. \quad (5) \end{aligned}$$

Далее, из построения на фиг. 4 следует, что

$$Dd = Le = Ff = Ng = Bb = Hc = AO_1 + O_1 m - O_1 A = O_1 m,$$

так как высота призмы равна  $AO_1 + O_1 m$  (см. построение). Ребра многогранника  $ed$ ,  $dc$ ,  $cb$  и т. д., расположенные на боковых гранях призмы, назовем первой группой ребер; ребра  $dp$ ,  $dn$ ,  $bn$ ,  $bm$  и т. д., служащие боковыми сторонами треугольников, у которых вершины лежат на боковых ребрах призмы, а основаниями которых служат стороны треугольников  $mnp$  и  $m_1 n_1 p_1$ , лежащих на основаниях призмы, назовем второй группой ребер; ребра  $cp$ ,  $gt$ ,  $pe$  и т. д. (фиг. 4), соединяющие вершины многогранника, лежащие на ребрах призмы, с вершинами, лежащими на основании призмы, назовем третьей группой ребер многогранника. Ребер первой группы — 6, второй — 12 (на фиг. 4 изображены 6 верхних) и третьей — 6 (изображены 3).

Все ребра первой группы равны между собой, так как они являются гипотенузами равных прямоугольных треугольников, у которых один катет равен стороне основания призмы, например  $kc = DC = ED = ek$ , а другой равен разности радиусов окружностей, описанных вокруг основания призмы и треугольника  $mnp$ , например  $dk = Kd - Kk = Dk - Dd = AO_1 - O_1 m$ .

Ребра второй группы также равны между собой как наклонные, имеющие равные проекции и равные проектирующие перпендикуляры [см. равенства (4) и построение].

По той же причине равны и ребра третьей группы [см. равенства (5)].

Кроме того,  $\triangle Cnc = \triangle dkc$  (фиг. 4), так как катеты  $Cc$  и  $kc$  равны по построению и  $dk$  по предыдущему равно  $AO_1 - O_1 m = nc$ . Следовательно,  $dc = nc$ , т. е. ребра первой группы равны ребрам третьей группы.

Докажем теперь, что  $dn = nc$ , т. е. что ребра второй группы равны ребрам третьей группы.

В прямоугольном треугольнике  $Dnd$ :  $(dn)^2 = (Dd)^2 + (Dn)^2$ ; но

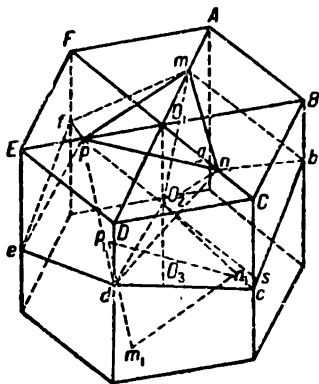
$$Dd = O_1m = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ [равенство (3)], } Dn = \frac{1}{3}a\sqrt{6}, \text{ поэтому}$$

$$(dn)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = a^2 \text{ и } dn = a. \quad (6)$$

Из прямоугольного треугольника  $Cnc$  имеем:

$$\begin{aligned} (nc)^2 &= (Cc)^2 + (nC)^2 = \frac{a^2(\sqrt{15} + \sqrt{3})^2}{36} + \frac{a^2(\sqrt{15} - \sqrt{3})^2}{36} = \\ &= \frac{a^2(18 + 2\sqrt{45}) + a^2(18 - 2\sqrt{45})}{36} = a^2, \\ nc &= a. \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), видим, что  $dn = nc$ , а приняв во внимание, что ребра второй группы равны ребрам первой группы и равны  $a$ , приходим к заключению, что все 30 ребер многогранника равны и грани его — равные правильные треугольники.



Фиг. 5.

Остается доказать равенство всех двугранных или многогранных углов многогранника. Для этого разобьем многогранник на 20 треугольных пирамид, имеющих основаниями грани двадцатигранника, а общей вершиной — середину оси призмы (фиг. 5). Боковыми ребрами пирамид будут линии, соединяющие середину оси призмы с вершинами многогранника. Разобьем все эти линии на две группы: к первой группе отнесем линии, соединяющие вершины треугольников  $mnp$  и  $m_1n_1p_1$  с серединой оси призмы, а ко второй группе — линии, соединяющие середину оси призмы с вершинами многогранника, лежащими на боковых ребрах призмы.

На фиг. 5 эти вершины многогранника изображены точками  $b, c, d, e, f, g$ . Очевидно, линии первой группы равны между собой как наклонные, имеющие равные проекции на основаниях призмы и равные проектирующие перпендикуляры. Равенство линий второй группы нетрудно видеть из равенства прямоугольных треугольников, у которых одним катетом служит радиус окружности, описанной вокруг основания призмы, а другим — разность между этим радиусом (на-

пример  $Cc \rightarrow O_1A$ ) и полуосью призмы. Далее, в прямоугольном треугольнике  $O_2cs$  (фиг. 5) по равенству (2) катет

$$O_2s = O_1A = \frac{a(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{6},$$

$$\begin{aligned} cs = Cc - Cs &= AO_1 - \frac{O_1O_s}{2} = AO_1 - \frac{AO_1 + O_1m}{2} = \frac{AO_1}{2} - \frac{O_1m}{2} = \\ &= \frac{a(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{12} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{12}, \end{aligned} \quad (8)$$

откуда

$$\begin{aligned} (O_2c)^2 &= (O_2s)^2 + (cs)^2 = \frac{a^2(18 + 2\sqrt{45})}{36} + \frac{a^2(18 - 2\sqrt{45})}{144} = \\ &= \frac{a^2(90 + 6\sqrt{45})}{144} = \frac{a^2(10 + 2\sqrt{5})}{16}; \\ O_2c &= \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}. \end{aligned} \quad (9)$$

В прямоугольном треугольнике  $O_1O_2n$

$$\begin{aligned} (O_2n)^2 &= (O_1n)^2 + (O_1O_2)^2 = (O_1m)^2 + \frac{(O_1A + O_1m)^2}{4} = \\ &= \frac{(O_1A)^2}{4} + \frac{O_1A \cdot O_1m}{2} + \frac{5(O_1m)^2}{4} = \\ &= \frac{a^2(18 + 2\sqrt{45})}{144} + \frac{a^2(\sqrt{45} + 3)}{36} + \frac{5a^2}{12} = \\ &= \frac{a^2(90 + 6\sqrt{45})}{144} = \frac{a^2(10 + 2\sqrt{5})}{16}, \\ O_2n &= \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}. \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, по (9) и (10)  $O_2C = O_2n$ , а потому все линии, соединяющие вершины многогранника с серединой оси призмы, равны между собой. Очевидно, они являются радиусами шара, описанного вокруг многогранника.

Проекция боковых ребер каждой из треугольных пирамид на ее основание равны, так как ребра равны, а потому вершина каждой пирамиды проектируется в центр основания, т. е. каждая пирамида — правильная. Высоты этих пирамид равны, что легко видеть из равенства треугольников, сторонами которых служат боковые ребра пирамиды, проекция ребра на основание пирамиды и ее высота. Таким образом у правильных треугольных пирамид основания и высоты равны. Следовательно, пирамиды равны, а также равны двугранные и трехгранные углы при осно-

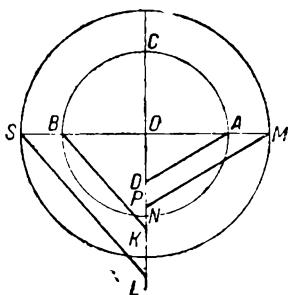


ваниях пирамид. Каждый двугранный угол двадцатигранника состоит из двух равных двугранных углов при основаниях треугольных пирамид, а каждый многогранный угол двадцатигранника состоит из пяти трехгранных углов при основаниях пирамид, одинаково расположенных относительно друг друга. Поэтому все двугранные и многогранные углы двадцатигранника равны, как состоящие из одинакового числа одинаково расположенных равных частей.

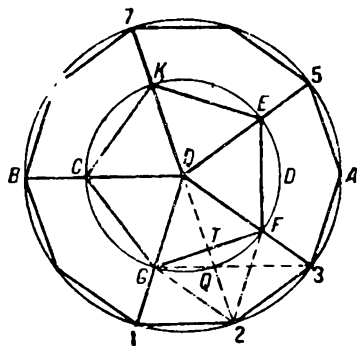
Итак, все грани двадцатигранника суть правильные равные треугольники, все двугранные и многогранные углы у него равны, а поэтому двадцатигранник — правильный.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ДОДЕКАЭДРА

Пусть  $a$  есть ребро додекаэдра. Построим прежде всего грань додекаэдра. Для этого в окружность произвольного радиуса вписываем правильный пятиугольник. Пусть  $AD$  (фиг. 6) — отрезок, равный стороне этого пятиугольника.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

На диаметре  $CN$  от центра  $O$  отложим отрезки  $OK = AD$  и  $OL = a$ . Соединим точку  $K$  с концом  $B$  диаметра  $AB$  и проведем  $LS \parallel BK$ . Радиусом  $OS$  из центра  $O$  описываем окружность, из конца  $M$  диаметра  $MS$  этой окружности проводим  $MP \parallel AD$ .  $MP = a$  будет стороной правильного пятиугольника, вписанного в окружность с радиусом  $OM$ .

Далее строим правильную десятиугольную призму следующим образом. Радиусом, равным  $OM + OP$ , описываем окружность и вписываем в нее правильный десятиугольник; сторона этого десятиугольника будет равна  $OM$  (фиг. 6). Этот десятиугольник будет основанием призмы (фиг. 7).

Из центра  $O$  радиусом  $OC = OM$  опишем окружность, которая пересечет диаметр  $AB$  первой окружности в точках  $C$  и  $D$ .

$AC = AO + OC$ , сумме радиусов обеих окружностей, примем за высоту правильной десятиугольной призмы.

Пусть десятиугольник на фиг. 7 изображает верхнее основание призмы. Проведем радиусы в 1, 3, 5-ю и т. д. вершины этого десятиугольника и соединим точки пересечения радиусов с малой окружностью; получим правильный пятиугольник  $SKEFG$ , который будет служить одной из граней додекаэдра. Повторим такое же построение на нижнем основании призмы, но только соединим с центром не 1, 3, 5-ю и т. д. вершины десятиугольника, а 2, 4, 6-ю и т. д. Получим вторую грань додекаэдра.

Построение остальных десяти граней додекаэдра видно на фиг. 8. От вершин 1, 3, 5, 7 и 9 верхнего основания призмы откладываем на боковых ребрах призмы отрезки  $D1, M3, \dots, A9$ , равные радиусу  $OC$ , а от вершин 2, 4, 6, 8 и 10 — отрезки  $H2, N1, \dots, B10$ , равные стороне  $SK$  пятиугольника. (Или на тех же ребрах отложим от вершин нижнего основания отрезки, равные стороне десятиугольника.) Соединим точки  $A, B, D, H, M, N, \dots$ , полученные на боковых ребрах призмы, с ближайшими к ним вершинами пятиугольников на верхнем и нижнем основаниях призм.

Срезав призму плоскостями, проходящими через линии  $DH, MH, GF$ , через  $AB, BD, CG$  и т. д., получим додекаэдр.

Конечно, для построения додекаэдра нет необходимости строить правильные пятиугольники на верхнем и нижнем основаниях призмы и проводить линии  $AC, DG, MF$  и т. д., а достаточно построить линии  $AB, BD, DH$  и т. д. на боковых гранях призмы так, как было описано выше, и провести плоскости углов  $ABD, BDH, DHM$  и т. д. Но на практике удобнее проводить срезающие плоскости не по двум направляющим линиям, а по трем.

### *Доказательство правильности построения*

На фиг. 6  $AD$  есть сторона правильного пятиугольника, вписанного в меньшую окружность (произвольного радиуса);  $OK = AD$ ,  $OL = a$  — ребру додекаэдра,  $SL \parallel BK$ ,  $MP \parallel AD$ .

Из подобия треугольников  $SOL$  и  $BOK$  имеем  $\frac{OS}{OB} = \frac{a}{AD}$ , а из подобия треугольников  $MOP$  и  $AOD$  получим  $\frac{OM}{OA} = \frac{MP}{AD}$ . Так как  $OM = OS$ ,  $OA = OB$ , то  $\frac{MP}{AD} = \frac{a}{AD}$ , откуда  $MP = a$ . Обозначим сторону правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса  $OM$  через  $a_5$ . Тогда, как известно,  $\frac{a_5}{AD} = \frac{OM}{OA}$  или по предыдущему  $\frac{a_5}{AD} = \frac{a}{AD}$ , т. е.  $a = a_5$ .

Докажем теперь, что  $OM$  есть сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса  $OB = R = OM + OP$  (фиг. 7). Из обычного способа построения правильного пяти-

угольника легко видеть, что  $OP$  на фиг. 6 есть сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса  $OM$ . Пусть  $OM = b$ , тогда (фиг. 7):

$$OB = R = b + \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2} = b \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

И поэтому, сторона правильного десятиугольника, вписанного в круг радиуса  $R$ :

$$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{b(\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{b(5-1)}{4} = b.$$

Проведем линии  $O2$ ,  $G3$ ,  $G2$  и  $F2$  (фиг. 7). Соединим точку  $Q$  пересечения радиуса  $O2$  с малой окружностью с точкой  $G$ . По построению  $G1 = GQ$ ,  $OG = 12$ ,  $\angle OGQ = \angle G12$ . Следовательно,  $\triangle OGQ = \triangle 1G2$ , а так как  $\triangle OGQ$  равнобедренный, то треугольник  $1G2$  тоже равнобедренный и  $12 = G2 = F2 = b$ , а четырехугольник  $OG2F$  есть ромб; поэтому  $OT = T2 = \frac{R}{2}$ .

Точно так же легко доказать, что  $\triangle OG3 = \triangle O12$ , откуда  $G3 = O2 = R$ .

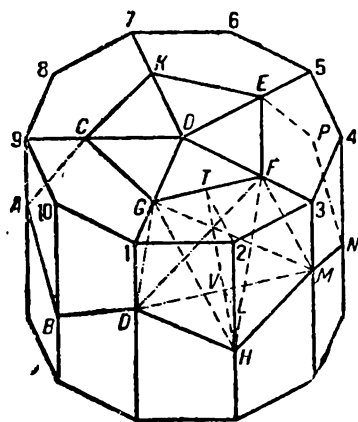
Легко видеть, что  $GF \parallel DM$  (фиг. 8); поэтому четыре линии  $DG$ ,  $GF$ ,  $FM$ ,  $DM$  лежат в одной плоскости. Докажем, что в той же плоскости лежит и треугольник  $DMH$ . Для этого проведем плоскость через точки  $DM$  параллельно основаниям призмы; она проходит на расстоянии  $b$  от верхнего основания призмы. Пусть эта плоскость пересечет ребро  $H2$  в точке  $L$ .

Проведем  $HT \perp GF$ ,  $HV \perp DM$  и соединим точки  $T$  и  $2$ ,  $V$  и  $L$ . Очевидно,  $T2 \perp GF$  и  $VL \perp DM$ ; поэтому угол  $HT2$  есть линейный угол двугранного угла между плоскостью  $DGFM$  и основанием призмы, а угол  $HVL$  есть линейный угол двугранного угла между плоскостью треугольника  $DHM$  и плоскостью  $ADLM$ . Легко находим, что

$$\operatorname{tg} \angle HT2 = \frac{H2}{T2} = R : \frac{R}{2} = 2;$$

$$\operatorname{tg} \angle HVL = \frac{HL}{VL} = (R - b) : \frac{G1}{2} = (R - b) : \frac{R - b}{2} = 2$$

(фиг. 8). Отсюда  $\angle HVL = \angle HT2$  и отрезки  $HV$  и  $TH$  лежат на одной прямой, а так как прямая не может лежать в двух непересекающихся плоскостях, то трапеция  $DGFM$  и треугольник  $DMH$  лежат в одной плоскости.



Фиг. 8.

В прямоугольных треугольниках  $G1D$ ,  $F3M$ ,  $DLH$  и  $MLH$  катеты соответственно равны  $b$  и  $R - b$ ; следовательно, эти треугольники равны и гипотенузы их  $GD$ ,  $DH$ ,  $MH$ ,  $MF$  тоже равны. Но  $GF = a$  как сторона правильного пятиугольника, вписанного в круг радиуса  $b$ , равна  $\frac{b\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ , а

$$\begin{aligned} GD &= \sqrt{(1G)^2 + (1G)^2} \sqrt{\frac{b^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} + b^2} = \\ &= b \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4} + 1} = \frac{b\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}; \end{aligned}$$

отсюда

$$GD = DH = MH = GF = MF = a.$$

По доказанному выше,  $G2 = F2 = b$ ;  $G3 = F1 = R$ . Проведя диагонали пятиугольника  $DGFMH$ , видим, что четыре из них, а именно  $GH$ ,  $FH$ ,  $DF$  и  $MG$ , являются гипотенузами прямоугольных треугольников, катетами которых служат  $b$  и  $R$ . Поэтому  $GH = FH = DF = MG$ . Диагональ  $DM$  есть сторона правильного пятиугольника, вписанного в круг радиуса  $R$ , а поэтому равна  $\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ . Из прямоугольного треугольника  $H2G$  имеем:

$$\begin{aligned} GH &= \sqrt{b^2 + R^2} = \sqrt{\frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} + R^2} = \\ &= R \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4} + 1} = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому  $DM = GH = FH = DF = MG$ , откуда

$$\triangle GDH = \triangle DGF = \triangle GFM = \triangle FMH = \triangle DMH$$

и

$$\angle DGF = \angle GFM = \angle FMH = \angle MHD = \angle HDG.$$

Следовательно, пятиугольник  $DGFMH$  — правильный. Очевидно, так же можно доказать, что и остальные боковые грани полученного многогранника суть правильные пятиугольники со сторонами, равными  $a$ . Так как трехгранные углы построенного двенадцатигранника имеют равные плоские углы, то все двугранные и трехгранные углы его равны. Итак, построенный многогранник имеет 12 равных граней — правильных пятиугольников, все его двугранные, трехгранные и плоские углы равны, следовательно, он является правильным двенадцатигранником, т. е. додекаэдром.

# СВОЙСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА, СТОРОНЫ КОТОРОГО СОСТАВЛЯЮТ АРИФМЕТИЧЕСКУЮ ПРОГРЕССИЮ

С. И. Зетель (Москва)

1. Наиболее интересные свойства рассматриваемого треугольника основаны на следующей теореме, данной Эйлером в 1747 г.:

*Во всяком треугольнике расстояние  $l$  между центрами круга, описанного около треугольника и вписанного в треугольник, определяется равенством:*

$$l^2 = R(R - 2r).$$

Так как во всем дальнейшем изложении теорема Эйлера имеет основное значение и так как доказательство этой теоремы обычно в наших курсах геометрии не приводится, то я позволю себе привести одно из ее доказательств.

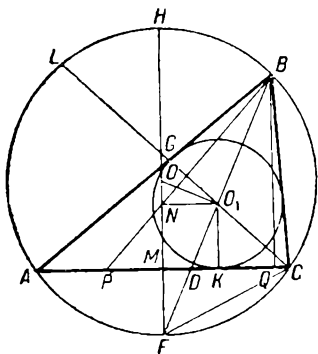
Пусть  $O$  — центр описанного круга и  $O_1$  — центр вписанного круга (фиг. 1).  $OO_1 = l$ ,  $OF = R$ ,  $O_1K = r$ .

Дуга  $AC$  делится биссектрисой  $BF$  в точке  $F$  пополам:

$$\sphericalangle AF = \sphericalangle FC.$$

Дуга  $AB$  делится биссектрисой  $CL$  в точке  $L$  пополам:

$$\sphericalangle AL = \sphericalangle LB.$$



Фиг. 1.

Отсюда следует, что  $\sphericalangle LAF = \sphericalangle LB + \sphericalangle FC$ . Так как угол  $O_1CF$  измеряется половиной дуги  $LAF$ , а угол  $CO_1F$  измеряется суммой дуг  $LB$  и  $FC$ , то

$$\sphericalangle CO_1F = \sphericalangle O_1CF.$$

Итак, стороны  $O_1F$  и  $CF$  треугольника  $O_1FC$  равны между собой.

Хорда  $CF = O_1F$  есть средняя пропорциональная между диаметром  $FH$  и отрезком  $FM$ :

$$O_1F^2 = 2R \cdot FM.$$

Из треугольника  $OO_1F$  имеем:

$$O_1F^2 = OO_1^2 + OF^2 - 2OF \cdot ON;$$

$$2R \cdot FM = l^2 + R^2 - 2R \cdot ON;$$

$$2R \cdot FM = l^2 + R^2 - 2R(OM - r);$$

$$l^2 + R^2 = 2R(FM + OM - r);$$

$$l^2 + R^2 = 2R(R - r);$$

$$l^2 = R^2 - 2Rr.$$

Интересное доказательство теоремы Эйлера дано проф. Гамбье (Gambier) (см. его статью в „Мат. просв.“ № 4 1935 г.).

Справедлива и обратная теорема. Если два круга радиусов  $R$  и  $r$  расположены так, что расстояние между их центрами

$$l = \sqrt{R^2 - 2Rr},$$

то можно построить бесчисленное множество треугольников, вписанных в один круг и касающихся другого.

2. Поставим следующую задачу: построить треугольник, стороны которого касаются данного круга, вписанный в другой данный круг, при условии, что стороны его составляют арифметическую прогрессию.

Предположим, что задача решена. Пусть треугольник  $ABC$  — искомый (фиг. 1) и пусть  $a < b < c$  и  $b = \frac{a+c}{2}$ . Разность прогрессии равна  $d$ . Отрезок  $DC$ , отсекаемый биссектрисой  $BD$ , равен:

$$DC = \frac{ba}{a+c} = \frac{(a+c)a}{2(a+c)} = \frac{a}{2}.$$

Из треугольника  $BDC$  имеем:

$$\frac{BO_1}{O_1D} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Итак, биссектриса  $BD$  в центре вписанного круга разделится в отношении 2:1, считая от вершины. Докажем равенство треугольников  $FMD$  и  $DKO_1$ , где  $M$  — середина стороны  $AC$ ,  $F$  — середина дуги  $AC$ ,  $K$  — точка касания вписанного круга:

$$AD = \frac{bc}{a+c} = \frac{(a+c)c}{2(a+c)} = \frac{c}{2};$$

$$MD = \frac{c}{2} - \frac{a+c}{4} = \frac{c-a}{4} = \frac{2d}{4} = \frac{d}{2}.$$

С другой стороны,

$$DC = \frac{a}{2};$$

$$KC = p - c = \frac{a+b-c}{2};$$

$$DK = \frac{a}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-b}{2} = \frac{d}{2}.$$

Итак,

$$\triangle FMD = \triangle DKO_1.$$

Следовательно,

$$FD = DO_1 = \frac{O_1B}{2}.$$

Хорда  $BF$  в точке  $O_1$  делится пополам, а потому  $OO_1 \perp BF$ . Отсюда получаем интересную теорему: в треугольнике со сторо-

нами, составляющими арифметическую прогрессию, биссектриса внутреннего угла, противолежащего средней стороне, перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанного и описанного кругов.

Эта теорема позволяет легко решить поставленную задачу: из центра вписанного круга следует восстановить перпендикуляр к линии центров до пересечения с описанной окружностью. Приняв одну из полученных точек за одну из вершин искомого треугольника и проведя из этой вершины касательные к кругу  $O_1$ , найдем две другие вершины треугольников, удовлетворяющие требованиям задачи.

Итак, задача всегда возможна (предполагается, что  $2r < R$ ) и допускает два решения. При  $r = \frac{R}{2}$  получается равносторонний треугольник.

Докажем справедливость обратной теоремы: если в треугольнике линия центров вписанной и описанной окружностей перпендикулярна одной из биссектрис внутреннего угла треугольника, то стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию.

Из вершины  $O_1$  прямого угла треугольника  $OO_1F$  опустим перпендикуляр  $O_1N$  на гипотенузу. Тогда

$$(OO_1)^2 = OF \cdot ON;$$

$$R(R - 2r) = R \cdot ON;$$

$$ON = R - 2r.$$

Следовательно,

$$NM = MF = r; \quad FD = DO_1;$$

$$\frac{BO_1}{O_1D} = \frac{a+c}{b} = 2; \quad b = \frac{a+c}{2},$$

и теорема доказана.

3. Треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, обладает рядом интересных свойств, из которых отметим следующие:

а) Радиус вписанного круга равен  $\frac{1}{3}$  высоты, опущенной на среднюю сторону:

$$r = \frac{1}{3} h_b.$$

Действительно,

$$r = \frac{2S}{2p} = \frac{2S}{3b}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad r = \frac{1}{3} h_b.$$

На основании этого свойства приходим к следующему заключению: прямая, соединяющая центр тяжести рассматриваемого треугольника с центром вписанного круга, параллельна средней стороне.

б)  $r_b = h_b$ , где  $r_b$  — радиус вневписанного круга, касающегося стороны  $b$ :

$$r_b = \frac{S}{p-b} = \frac{S}{\frac{3b}{2} - b} = \frac{2S}{b} = h_b.$$

Следовательно, продолжая биссектрису, исходящую из вершины  $B$  на ее длину, найдем центр вневписанного круга.

с) Если стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию, то и котангенсы половинных углов треугольника составляют арифметическую прогрессию.

Если  $a, b, c$  составляют арифметическую прогрессию, то, очевидно,  $p-a, p-b, p-c$  составляют арифметическую прогрессию, а следовательно,  $\frac{p-a}{r}, \frac{p-b}{r}, \frac{p-c}{r}$  также составляют арифметическую прогрессию. Но

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}; \quad \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{p-b}{r}; \quad \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p-c}{r}.$$

д) Произведение котангенсов половинных углов, противолежащих большей и меньшей сторонам, постоянно:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= \frac{p-a}{r} \cdot \frac{p-c}{r} = \frac{(p-a)(p-c)}{r^2} = \\ &= \frac{p(p-a)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p}{p-b} = \frac{3b \cdot 2}{2b} = 3. \end{aligned}$$

Из полученного нами соотношения  $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 3$  можно получить интересное следствие:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= \frac{(p-a)(p-c)}{r^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{3b}{2} - b + d\right)\left(\frac{3b}{2} - b - d\right)}{r^2} = \frac{b^2 - 4d^2}{4r^2} = 3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$b^2 - 4d^2 = 12r^2.$$

е) Для остроугольного треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, сумма расстояний от центра описанного круга до большей и меньшей сторон равна диаметру вписанного круга.



Обозначим расстояние от центра описанного круга до сторон  $BC$  и  $AB$  соответственно  $l_a$  и  $l_c$ . Из треугольников  $OC_1A$  и  $OA_1C$  имеем (фиг. 2):

$$OA_1 = l_a = \frac{a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{2},$$

$$OC_1 = l_c = \frac{c \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{2}.$$

Сложив почленно, получим:

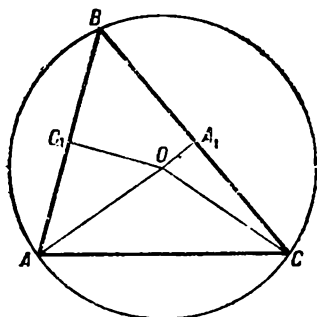
$$\begin{aligned} l_a + l_c &= a \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} - 1}{4 \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} + c \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} - 1}{4 \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{a \left( 3 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} - \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) + c \left( 3 \operatorname{ctg} \frac{C}{2} - \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \right)}{12} = \\ &= \frac{3a \frac{p-a}{r} - a \frac{p-c}{r} + 3c \frac{p-c}{r} - c \frac{p-a}{r}}{12}; \end{aligned}$$

так как

$$a = b - d, \quad c = b + d,$$

то

$$\begin{aligned} l_a + l_c &= \frac{(b-d)(3b+b+d-3b+3d) + (b+d)(3b+b-d-3b-3d)}{12r} = \\ &= \frac{(b-d)(b+4d) + (b+d)(b-4d)}{12r} = \\ &= \frac{2b^2 - 8d^2}{12r} = 2r. \end{aligned}$$



Фиг. 2.

В случае тупоугольного треугольника ( $c > \frac{\pi}{2}$ )  $l_c$  отрицательно.

и мы получаем: разность расстояний от центра описанного круга до меньшей и большей сторон треугольника равна диаметру вписанного круга.

Соотношение  $l_a \pm l_c = 2r$  можно было бы получить гораздо легче, если использовать одну интересную теорему геометрии треугольника—теорему Карно.

**Теорема Карно.** Во всяком треугольнике сумма расстояний от центра описанного круга до сторон треугольника равна сумме радиусов вписанного и описанного кругов (в тупоугольном треугольнике расстояние от центра описанного круга до большей стороны следует взять с отрицательным знаком).

Доказательства теоремы Карно мы не даем, так как оно требует доказательства нескольких мало известных теорем геометрии

треугольника. Мы только покажем, как легко из теоремы Карно получается выведенное нами свойство треугольника.

Действительно, приняв, что  $l_a + l_b + l_c = R + r$  и зная, что  $l_b = R - r$ , получим:

$$l_a + R - r + l_c = R + r;$$

$$l_a + l_c = 2r.$$

4. Раньше чем вывести дальнейшие свойства рассматриваемых треугольников, остановимся на следующей теореме геометрии треугольника.

*Во всяком треугольнике  $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ .*

Имеется очень изящное доказательство этой теоремы. К сожалению, это доказательство основано на теоремах мало известных. Мы получим вышенаписанное равенство, выразив радиусы описанного, вписанного и внеписанных кругов через стороны треугольника

$$R = \frac{abc}{4S},$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{\alpha\beta\gamma}{S},$$

где

$$p-a = \alpha, \quad p-b = \beta, \quad p-c = \gamma.$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = \frac{p(p-b)(p-c)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Таким образом

$$r_a = \frac{p\beta\gamma}{S}, \quad r_b = \frac{p\gamma\alpha}{S}, \quad r_c = \frac{p\alpha\beta}{S}.$$

Теперь, складывая эти выражения, имеем:

$$r_a + r_b + r_c = \frac{p\alpha(\beta + \gamma) + p\beta\gamma}{S} = \frac{p(\alpha a + \beta\gamma)}{S}.$$

Вычитая отсюда  $r$ , получаем:

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= \frac{p\alpha a + p\beta\gamma - \alpha\beta\gamma}{S} = \frac{p\alpha a + \beta\gamma a}{S} = \\ &= \frac{a(p\alpha + \beta\gamma)}{S} = \frac{a(p^2 - pa + p^2 - pc - pb + bc)}{S} = \\ &= \frac{a[p(2p - a - b - c) + bc]}{S} = \frac{abc}{S}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

Так как в рассматриваемых нами треугольниках

$$r_b = 3r,$$

то

$$r_a + r_c = 4R - 2r.$$

5. В треугольнике, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, интересно расположение одной замечательной точки треугольника — точки Нагеля (Nagel).

Точкой Нагеля называется точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон и внеписанных окружностей. Докажем, что эти прямые пересекаются в одной точке. Пусть в треугольнике  $ABC$  прямые  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  (фиг. 3) соединяют вершины треугольника с точками касания внеписанных кругов. Как известно,

$$BF = p - a; \quad BD = p - c;$$

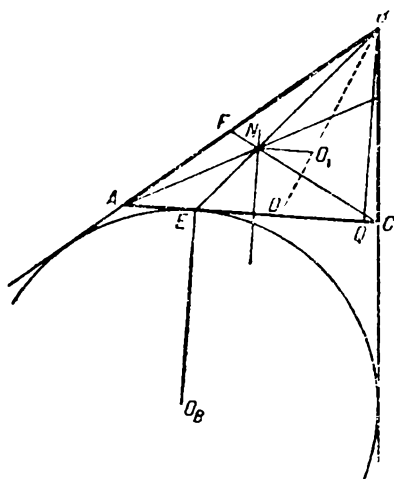
$$AE = p - c; \quad AF = p - b;$$

$$CD = p - b; \quad CE = p - a.$$

Отсюда тотчас же следует, что  $BF \cdot AE \cdot CD = BD \cdot CE \cdot AF$ .

На основании теоремы, обратной теореме Чебы, заключаем, что прямые  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  пересекаются в одной точке  $N$  — точке Нагеля.

Мы докажем, что в рассматриваемом нами треугольнике точка Нагеля лежит на прямой, соединяющей центр тяжести треугольника с центром вписанного круга. Эта прямая, как мы



Фиг. 3.

показали, параллельна средней стороне треугольника. Итак, мы желаем доказать, что  $\frac{BN}{NE} = 2$ .

Для доказательства этого положения обратимся к теореме ван-Обеля (van Aubel).

**Теорема ван-Обеля.** Для каждой из прямых Чебы, пересекающихся внутри треугольника в точке  $N$ , существует соотношение

$$\frac{BN}{NE} = \frac{BF}{FA} + \frac{BD}{DC}.$$

Рассматривая площади треугольников  $BNC$  и  $ANC$ , найдем, что

$$\frac{\text{пл. } \triangle BNC}{\text{пл. } \triangle ANC} = \frac{BF}{FA}$$

( $BF$  и  $AF$  пропорциональны высотам, опущенным из вершин  $B$  и  $A$  на общее основание  $NC$ ),

$$\frac{\text{пл. } \triangle BNA}{\text{пл. } \triangle ANC} = \frac{BD}{DC}.$$

Следовательно,

$$\frac{BF}{FA} + \frac{BD}{DC} = \frac{\text{пл. } \triangle BNA + \text{пл. } \triangle BNC}{\text{пл. } \triangle ANC}. \quad (1)$$

Найдем отношение площадей треугольников  $BNC$  и  $CNE$ :

$$\begin{aligned} \frac{\text{пл. } \triangle BNC}{\text{пл. } \triangle CNE} &= \frac{BN}{NE}; \\ \frac{\text{пл. } \triangle BNA}{\text{пл. } \triangle NEA} &= \frac{BN}{NE}; \\ \frac{\text{пл. } \triangle BNC}{\text{пл. } \triangle CNE} &= \frac{\text{пл. } \triangle BNA}{\text{пл. } \triangle NEA} = \frac{BN}{NE}; \\ \frac{\text{пл. } \triangle BNC + \text{пл. } \triangle BNA}{\text{пл. } \triangle CNE + \text{пл. } \triangle NEA} &= \frac{BN}{NE}; \\ \frac{\text{пл. } \triangle BNC + \text{пл. } \triangle BNA}{\text{пл. } \triangle ANC} &= \frac{BN}{NE}. \end{aligned} \quad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), получаем:

$$\frac{BN}{NE} = \frac{BF}{FA} + \frac{BD}{DC}.$$

Итак, теорема ван-Обеля доказана.

Для нашего треугольника для прямой Чебы, выходящей из вершины  $B$  и пересекающейся с двумя другими прямыми Чебы в точке Нагеля, имеем:

$$\frac{BN}{NE} = \frac{p-a}{p-b} + \frac{p-c}{p-b} = \frac{2p-a-c}{p-b} = \frac{b}{p-b}.$$

Так как

$$p-b = \frac{3b}{2} - b = \frac{b}{2},$$

то

$$\frac{BN}{NE} = \frac{2b}{b} = 2.$$

Итак, точка Нагеля лежит на прямой  $O_1N$ , параллельной средней стороне.

Покажем еще одно интересное свойство точки Нагеля. Точка Нагеля лежит на прямой  $O_1N$  в пересечении ее с перпендикуляром, восставленным из середины  $AC$ , т. е. точка Нагеля совпадает с проекцией центра вписанного круга на медиатрису средней стороны. Доказательство проведем следующим образом: соединим вершину  $B$  с точкой  $N$  и покажем, что  $BN$  пересечет сторону  $AC$  в точке  $P$  — в точке касания внеписанной окружности на фиг. 3 она обозначена буквой  $E$ ).

Так как  $MN = \frac{1}{3} h_b$  (фиг. 1), то

$$PM = \frac{1}{3} PQ; \quad PM = \frac{1}{2} MQ;$$

$$MQ = MD + 3DK = \frac{d}{2} + \frac{3d}{2} = 2d;$$

$$PM = d;$$

$$AP = \frac{b}{2} - d = \frac{3b}{2} - (b + d) = p - c.$$

Итак,  $P$  есть точка касания стороны  $AC$  и вневписанного круга.

Интересными свойствами в этом треугольнике обладает точка Лемуана (Lemoine). В точке Лемуана пересекаются симедианы треугольника — прямые, выходящие из вершины треугольника и делящие противоположные стороны в отношении квадратов прилежащих сторон. Симедианы — частный случай „прямых  $n$ “ (см. мою статью в „Мат. просв.“ № 1 за 1934 г.). Известно, что расстояние от точки Лемуана до сторон треугольника пропорционально соответствующим сторонам. Отсюда заключаем, что *расстояние от точки Лемуана до средней стороны есть среднее арифметическое расстояний до двух других сторон.*

Рассмотрим свойства прямоугольного треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию.

а) радиус вписанного круга равен  $\frac{1}{3}$  меньшего катета;

б) радиус вневписанного круга, касающегося большего катета, равен меньшему катету;

с) так как произведение котангенсов половинных углов, противолежащих большей и меньшей сторонам, постоянно равно трем, то из

$$\operatorname{ctg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 3 \text{ и } \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 1$$

следует

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 3.$$

Так как котангенсы половинных углов составляют арифметическую прогрессию, то  $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = 2$ .

Итак,

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 3; \quad \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = 2; \quad \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 1.$$

д) Нами было доказано, что сумма расстояний от центра описанного круга до большей и меньшей сторон равна диаметру вписанного круга:

$$l_a + l_c = 2r.$$

Так как при  $C = \frac{\pi}{2}$   $l_c = 0$ , то  $l_a = 2r$ .

Принимая во внимание, что  $l_a = \frac{b}{2}$ , получим:

$$r = \frac{b}{4}.$$

е) Для всякого треугольника существует соотношение

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

При  $r_b = a$  получим для прямоугольного треугольника ( $2R = c$ )

$$r_a + a + r_c = 2c + \frac{a}{3}; \quad r_a + r_c = 2c - \frac{2a}{3}.$$

ф) Симедианы в прямоугольном треугольнике пересекаются на середине симедианы, проведенной из вершины прямого угла. Так как высота, опущенная из вершины прямого угла, совпадает с симедианой, то точка Лемуана (точка пересечения симедиан) лежит на середине высоты, опущенной из вершины прямого угла. Отсюда заключаем: перпендикуляр, опущенный из основания высоты на больший катет, есть среднее арифметическое между перпендикуляром, опущенным на меньший катет, и высотой, опущенной на гипотенузу.

## ПОКРЫТИЕ ПЛОСКОСТИ КВАДРАТАМИ, ПРАВИЛЬНЫМИ ШЕСТИУГОЛЬНИКАМИ И ПРАВИЛЬНЫМИ ЗВЕЗДЧАТЫМИ ДВЕНАДЦАТИУГОЛЬНИКАМИ

Р. Н. Бончковский (Москва)

С геометрической точки зрения представляет интерес рассмотрение таких покрытий плоскости правильными многоугольниками, в которых фигуры, заполняя сплошь всю плоскость и соприкасаясь по целым ребрам, частично перекрывают друг друга. Здесь я дам пример одного правильного покрытия плоскости этого типа.

В дальнейшем будем рассматривать только ориентированные правильные многоугольники. Будем называть многоугольник ориентированным положительно, если на его контуре определено такое направление обхода, при котором обход центра многоугольника совершается против часовой стрелки; если на контуре определено противоположное направление обхода, то многоугольник будем считать ориентированным отрицательно.

Если какая-либо точка  $P$  не лежит на контуре многоугольника, а точка  $X$  пробегает его контур один раз в том направлении, которое соответствует избранной положительной ориентации многоугольника, и если при этом аргумент радиуса-вектора  $PX$  изменяется на  $2k\pi$ , то мы будем говорить, что точка  $P$  покрыта многоугольником  $k$  раз. При этом число  $k$  будем считать положительным, если  $PX$  повернется в направлении против часовой стрелки, и отрицательным — в противоположном случае.

Теперь сделаем на плоскости следующие построения. Рассмотрим покрытие плоскости правильными треугольниками со стороной  $a + 2a \operatorname{tg} 15^\circ$ . От каждой вершины этой сети треугольников в шести направлениях на сторонах треугольников откладываем отрезки  $a \operatorname{tg} 5^\circ$ , в их концах восстанавливаем перпендикуляры и на каждом перпендикуляре в обе стороны от основания откладываем отрезок  $\frac{a}{2}$ . Концы перпендикуляров, восстановленных в одну сторону одной из сторон какого-либо треугольника сети, соединяем прямолинейным отрезком. Таким образом на плоскости получится система квадратов со стороной  $a$ , частично перекрывающих друг друга.

12 вершин упомянутых квадратов, ближайших к какой-либо вершине сети треугольников, расположены на одной окружности и делят ее на 12 равных частей. Поэтому их можно принять за вершины звездчатого правильного многоугольника, шесть сторон которого совпадают со сторонами построенных ранее квадратов.

Ориентируем отрицательно все квадраты и все двенадцатиугольники. Эти ориентации многоугольников индуцируют определенное направление на их сторонах; именно, общая сторона двух многоугольников в соответствии с ориентацией одного из них оказывается направленной в одну сторону, а в соответствии с ориентацией другого — в противоположную. Такую ориентацию смежных многоугольников принято считать соответственной.

Свободные стороны квадратов и двенадцатиугольников оказываются расположенными так, что они образуют на плоскости систему правильных шестиугольников, частично перекрывающих друг друга. Все эти шестиугольники ориентируем положительно. Нетрудно убедиться, что эта ориентация шестиугольников соответствует как ориентации квадратов, так и ориентации двенадцатиугольников.

Полученное после этих построений покрытие плоскости квадратами, правильными шестиугольниками и правильными звездчатыми двенадцатиугольниками изображено на чертеже. Это покрытие правильно в следующем смысле:

- 1) все квадраты равноправны;
- 2) все шестиугольники равноправны;
- 3) все двенадцатиугольники равноправны;
- 4) все вершины равноправны.

Система многоугольников образует при этом некоторую поверхность, наложенную на плоскость. Несмотря на то, что многоугольники, составляющие эту поверхность, многократно перекрывают друг друга, эта поверхность покрывает плоскость всего лишь один раз. В самом деле, определим сперва, сколько раз покрыт, например, центр двенадцатиугольника. Центр двенадцатиугольника покрыт шестью шестиугольниками, каждым  $+1$  раз; всего получается  $+6$  покрытий. Кроме того, он покрыт одним двенадцатиугольником, притом  $-5$  раз. Квадраты не покрывают его вовсе. Таким образом центр двенадцатиугольника покрыт  $+6 - 5 + 0 = +1$  раз.

Нетрудно убедиться, что это число не меняется при переходе к другим точкам. Пусть  $A$  — какая-либо точка плоскости, не лежащая на стороне многоугольника, и  $O$  — центр двенадцатиугольника. Пусть  $OA$  — какая-либо ломаная, соединяющая эти точки. Пусть подвижная точка  $P$  пробегает ломаную  $OA$ . Число покрытий точки  $P$  может измениться только тогда, когда она пересекает сторону многоугольника. Но благодаря согласованности ориентаций многоугольников этого случиться не может.

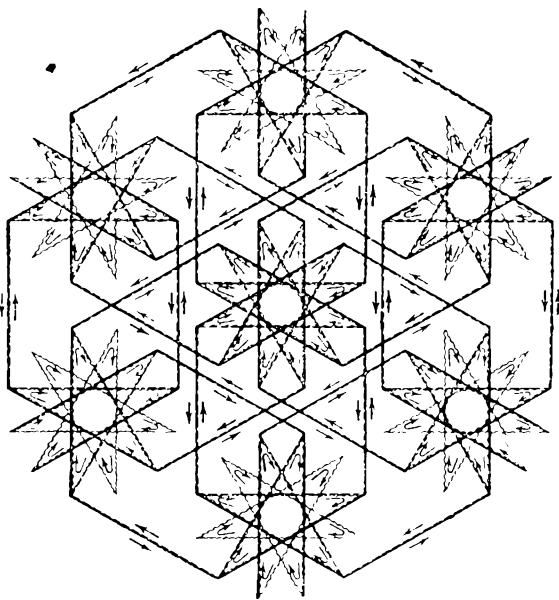
В самом деле, если точка  $P$ , покидая квадрат, пересекает сторону двенадцатиугольника, то, покидая квадрат, она теряет одно отрицательное покрытие, а пересекая сторону двенадцатиугольника, приобретает одно отрицательное покрытие. При обратном направлении движения процесс протекает в обратном порядке.

Если точка  $P$ , покидая квадрат, пересекает сторону шестиугольника, то она в то же время покидает и шестиугольник. Покидая квадрат, она теряет одно отрицательное покрытие; покидая шестиугольник, она теряет одно положительное покрытие.

Если же точка  $P$ , пересекая общую сторону квадрата и шестиугольника, вступает в них, то, вступая в квадрат, она приобретает одно отрицательное покрытие, а вступая в шестиугольник — одно положительное покрытие.

Если же точка  $P$  пересекает общую сторону шестиугольника и двенадцатиугольника, то, покидая шестиугольник, она теряет одно положительное покрытие и в то же время теряет одно отрицательное покрытие двенадцатиугольником; если же точка вступает в шестиугольник, то она приобретает одно положительное покрытие шестиугольником и одно отрицательное покрытие двенадцатиугольником.

Таким образом квадраты, шестиугольники и двенадцатиугольники в совокупности покрывают плоскость один раз.



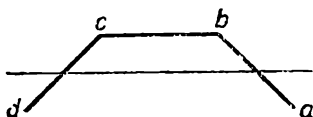
Фиг. 1.



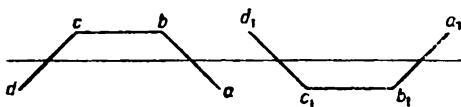
## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОПОРЦИЙ

С. Е. Арш он (Москва)

1. Условимся понимать фиг. 1 следующим образом. Горизонтальная прямая изображает числовую ось. Начерченная на ней равнобокая трапеция означает, что на числовой оси мы рассматриваем четыре числа  $a, b, c, d$ , соответствующие проекциям вершин этой трапеции на числовую ось. Изображаемую таким образом совокупность из четырех чисел мы будем в дальнейшем называть звеном первого порядка, а самые числа — членами звена. Среди членов звена мы будем различать верхние члены, соответствующие проекциям верхних вершин трапеции (на фиг. 1 числа  $b$  и  $c$ ) и нижние члены, соответствующие проекциям нижних вершин трапеции (на фиг. 1 числа  $a$  и  $d$ ).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Рассмотрим два звена, изображенные на фиг. 2. Мы замечаем, что эти два звена различаются, между прочим, тем, что в первом звене его крайний левый член  $d$  является нижним, а во втором звене его крайний левый член  $d_1$  является верхним. Условимся звено, у которого крайний левый член является нижним, называть прямым, а звено, у которого крайний левый член является верхним, называть обратным.

Два звена с последовательными членами  $a, b, c, d$  и  $a_1, b_1, c_1, d_1$  будем называть равными, если у них

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} a - b &= a_1 - b_1 \\ b - c &= b_1 - c_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из этого условия следует, что в равных звеньях также

$$a - c = a_1 - c_1.$$

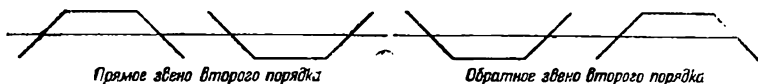
Это определение равных звеньев можно заменить более коротким: два звена будут равны, если путем наложения друг на друга они могут быть приведены к совпадению. При этом очевидно, что это „геометрическое“ определение равенства звеньев равносильно условиям (1).

2. Два равных звена первого порядка, из которых одно прямое, другое обратное, образуют звено второго порядка. Звенья второго порядка по тому же принципу, что и звенья первого

порядка будут делиться на прямые и обратные. Так, например, на фиг. 3 изображены прямое и обратное звенья второго порядка. Два звена второго порядка будут равны, если они путем наложения друг на друга могут быть приведены к совмещению.

Два равных звена второго порядка, одно прямое, другое обратное, образуют звено третьего порядка. Звенья третьего порядка делятся так же как звенья низшего порядка, на прямые и обратные. Два звена третьего порядка будут равны, если путем наложения они могут быть приведены к совмещению.

Вообще будем называть звеном  $k$ -го порядка два равных звена  $(k-1)$ -го порядка, из которых одно прямое, другое обратное. Из определения звена следует, что звено  $k$ -го порядка содержит  $2^{k+1}$  членов и что оно может быть разбито на  $2^{k-1}$  звеньев  $i$ -го порядка.



Фиг. 3.

Из определения равных звеньев следует также, что если  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2^{k+1}}$  суть последовательные (считая слева) члены какого-либо звена  $k$ -го порядка, то последовательные члены любого равного ему звена выразятся числами  $x_1 + r, x_2 + r, x_3 + r, \dots, x_{2^{k+1}} + r$ , где  $r$  — число, выражающее расстояние между крайними левыми членами этих двух звеньев.

3. Условимся в дальнейшем сумму  $i$ -х степеней верхних членов звена  $Z$  обозначать постоянно символом  $U_i(Z)$ , а сумму  $i$ -х степеней его нижних членов — символом  $V_i(Z)$ .

**Лемма I.** Если  $Z$  — звено первого порядка, то

$$U_1(Z) - V_1(Z) = 0. \quad (2)$$

Это очевидно, так как члены звена первого порядка образуют арифметическую пропорцию (трапеция равнобокая), и, следовательно, равенство (2) выражает основное свойство арифметических пропорций.

**Теорема I.** Если  $Z$  — звено  $k$ -го порядка, то

$$U_k(Z) - V_k(Z) = 0. \quad (3)$$

Эту теорему мы докажем с помощью индукции. При  $k=1$  она согласно предыдущей лемме верна. Положим, что она верна при  $k=n$ . Требуется доказать, что она будет при этом предположении верна и при  $k=n+1$ .

Однако, прежде чем приступить к доказательству, необходимо заметить, что предположение, что теорема верна для  $k=n$ , содержит в себе и тот факт, что

$$U_i(Z) - V_i(Z) = 0$$

при  $i=1, 2, 3, \dots, (n-1)$ . В самом деле, звено  $k$ -го порядка состоит из  $2^{k-1}$  звеньев  $i$ -го порядка (§ 2). Следовательно, в силу

предположения  $U_i(Z) - V_i(Z) = 0$  для всех этих звеньев, а значит, и  $U_i(Z) - V_i(Z) = 0$  для звена  $n$ -го порядка. Теперь приступим непосредственно к доказательству высказанной теоремы.

Звено  $Z$   $(n+1)$ -го порядка состоит из двух звеньев  $n$ -го порядка, из которых одно прямое, другое обратное (§ 2). Обозначим прямое из этих звеньев через  $Z_1$  и обратное — через  $Z'_1$ . Пусть нижние члены  $Z_1$  будут (считая слева) соответственно

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2^n},$$

его верхние члены:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_{2^n}.$$

Тогда, принимая во внимание § 2, верхние члены  $Z'_1$  будут

$$x_1 + r, x_2 + r, x_3 + r, \dots, x_{2^n} + r,$$

а его нижние члены:

$$y_1 + r, y_2 + r, y_3 + r, \dots, y_{2^n} + r.$$

Следовательно,  $U_{n+1}(Z) - V_{n+1}(Z)$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} U_{n+1}(Z) - V_{n+1}(Z) &= \sum_{i=1}^{2^n} y_i^{n+1} + \sum_{i=1}^{2^n} (x_i + r)^{n+1} - \\ &- \sum_{i=1}^{2^n} x_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{2^n} (y_i + r)^{n+1}, \end{aligned}$$

что после преобразования дает:

$$\begin{aligned} U_{n+1}(Z) - V_{n+1}(Z) &= (n+1)r \sum_{i=1}^{2^n} (x_i^n - y_i^n) + \\ &+ \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} r^2 \sum_{i=1}^{2^n} (x_i^{n-1} - y_i^{n-1}) + \dots + (n+1)r^n \sum_{i=1}^{2^n} (x_i - y_i) = \\ &= (n+1)r [U_n(Z) - V_n(Z)] + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} r^2 \cdot 2 [U_{n-1}(Z) - V_{n-1}(Z)] + \dots \end{aligned}$$

Но согласно предположению каждый член правой части равен нулю, что и доказывает теорему.

Установленное в теореме 1 свойство звеньев имеет некоторые любопытные применения. Здесь мы покажем, как, пользуясь этим свойством, можно находить неограниченное количество различных целых решений для некоторого класса неопределенных уравнений при условии, что известно одно решение.

4. Для примера рассмотрим известное уравнение<sup>1</sup>

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (4)$$

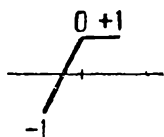
Для этого уравнения совершенно очевидным (тривиальным) решением будет:

$$x = -1, \quad y = 0, \quad z = 1.$$

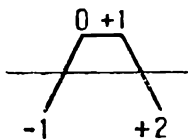
Примем эти корни  $(-1, 0, 1)$  за три последовательных члена звена первого порядка и отметим их на числовой оси, как показано на фиг. 4.

Дополним теперь фиг. 4 до равнобокой трапеции. Получим (фиг. 5) звено  $-1, 0, 1, 2$ .

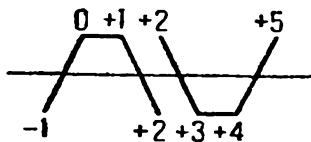
Пристроим к этому звену ему равное, но обратное, так чтобы член 2 у них был общим (фиг. 6).



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Тогда члены нового звена, именно числа 3, 4, 5, будут также корнями уравнения (4). В самом деле, фиг. 6 изображает звено второго порядка. Для него

$$(-1)^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2,$$

откуда

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Теперь, естественно, возникает вопрос: как найти новые тройки корней уравнения (4)? Дело в том, что если для этого воспользоваться тройкой 3, 4, 5, то мы получим из нее лишь связанную с ней, а именно, уже известную нам тройку  $-1, 0, 1$ . Однако выход из тупика имеется довольно простой. Наряду с тройкой 3, 4, 5 корнями уравнения (4) будут, очевидно, также и следующие тройки:

$$\begin{array}{lll} -3, & 4, & 5; \\ 3, & -4, & 5; \\ 3, & 4, & -5; \end{array} \quad \begin{array}{lll} -3, & -4, & 5; \\ -3, & 4, & -5; \\ 3, & -4, & -5; \\ -3, & -4, & -5. \end{array}$$

<sup>1</sup> Это уравнение, как известно, имеет бесчисленное множество целых решений, если положить

$$x = m^2 + n^2, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = 2mn,$$

где  $m$  и  $n$  — любые целые числа.

Если тройку (положительных) корней этого уравнения принять за длины сторон треугольника, то, как следует из теоремы, обратной теореме Пифагора, треугольник, построенный по этим сторонам, будет прямоугольным.

Такие треугольники иногда называются египетскими, так как известно, что египтяне пользовались такими треугольниками для построения прямых углов.



ксимирующая его дробь, но и простотой дроби  $\frac{p}{q}$ , считая ее тем более простой, чем меньше ее члены  $p$  и  $q$ .

Пусть число  $z$  разложено в правильную непрерывную дробь

$$z = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}} \quad (1)$$

или, в других обозначениях:

$$z = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots], \quad (1')$$

и  $\frac{p_k}{q_k}$  —  $k$ -я подходящая дробь этого разложения. Тогда, как известно, если рациональная дробь  $\frac{a}{b}$  удовлетворяет неравенству

$$z - \frac{a}{b} \left| < \left| z - \frac{p_k}{q_k} \right| \right|,$$

то  $b > q_k$ . Выражая этот факт, говорят, что подходящая дробь есть наилучшее приближение первого рода числа  $z$ . И вообще, всякая дробь  $\frac{p}{q}$  называется наилучшим приближением первого рода числа  $z$ , если из неравенства  $\left| z - \frac{a}{b} \right| < \left| z - \frac{p}{q} \right|$  следует  $b > q$ .

Таким образом наилучшее приближение обладает тем свойством, что всякая дробь, лучше его аппроксимирующая число  $z$ , оказывается менее простой. Всякое иррациональное число имеет бесчисленное множество наилучших приближений первого рода, причем все они теснейшим образом связаны с разложением этого числа в правильную непрерывную дробь.

Кроме указанных приближений, в теории чисел рассматриваются еще приближения второго рода. Известна теорема, утверждающая, что для любого иррационального числа  $z$  и произвольного  $\varepsilon > 0$  можно подобрать бесчисленное множество дробей  $\frac{p}{q}$  таких, что

$$|qz - p| < \varepsilon.$$

Приближения  $\frac{p}{q}$  числа  $z$ , оцениваемые величиной  $|qz - p|$ , называются приближениями второго рода. Дробь  $\frac{p}{q}$  называется наилучшим приближением второго рода числа  $z$ , если из неравенства  $|bz - a| < |qz - p|$  следует  $b > q$ .

Очевидно, к приближениям второго рода предъявляются более сильные требования, чем к приближениям первого рода, так как неравенство  $|qz - p| < \varepsilon$  эквивалентно неравенству  $\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}$ .

В настоящей статье решается вопрос о том, какие числа являются наилучшими приближениями, причем в основном сообщается материал, уже известный в литературе; автору статьи принадлежат лишь доказательства (за исключением доказательства теоремы 1, заимствованного из книги О. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen).

## § 1. О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ПЕРВОГО РОДА

Пусть число  $z$  разложено в непрерывную дробь (1). Кроме подходящих дробей этого разложения, рассматривают еще так называемые промежуточные дроби вида

$$\frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k} \quad (0 < m < a_{k+1}),$$

где  $p_{k-1}$ ,  $q_{k-1}$ ,  $p_k$ ,  $q_k$  — члены двух смежных подходящих дробей,  $m$  — целое число и  $a_{k+1}$  — частный знаменатель разложения.

Установим некоторые свойства промежуточных дробей. Известно, что подходящие дроби четного порядка  $\left(\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_4}{q_4}, \dots\right)$  образуют возрастающую последовательность, а дроби нечетного порядка  $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_5}{q_5}, \dots\right)$  — убывающую. Легко показать, что промежуточные дроби укладываются в эти две последовательности, как промежуточные члены, чем и объясняется их название.

Положим

$$u_{km} = \frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k}.$$

Если  $k$  — число нечетное, то

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} < u_{km} < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}},$$

в чем легко убедиться, составив разности  $u_{km} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  и  $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - u_{km}$ , которые окажутся положительными. Например:

$$u_{km} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{m(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)}{q_{k-1}(q_{k-1} + mq_k)}.$$

Но так как по известной формуле  $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$  и  $k$  — число нечетное, то очевидно, что

$$u_{km} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} > 0.$$

Итак, дробь  $u_{km}$  заключена между двумя подходящими дробями. Кроме того, при  $k$  нечетном  $u_{km} < u_{kn}$ , если  $m < n$ .

Действительно, сделав надлежащие выкладки, получим:

$$u_{kn} - u_{km} = \frac{(n-m)(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)}{(q_{k-1} + mq_k)(q_{k-1} + nq_k)} = \frac{(n-m) \cdot (-1)^{k-1}}{(q_{k-1} + mq_k)(q_{k-1} + nq_k)} > 0.$$

Таким образом при  $k$  нечетном

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} < \frac{p_{k-1} + p_k}{q_{k-1} + q_k} < \frac{p_{k-1} + 2p_k}{q_{k-1} + 2q_k} < \dots < \frac{p_{k-1} + a_{k+1}p_k}{q_{k-1} + a_{k+1}q_k} = \frac{p_k}{q_k} > \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

и аналогично при  $k$  четном

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} > \frac{p_{k-1} + p_k}{q_{k-1} + q_k} > \frac{p_{k-1} + 2p_k}{q_{k-1} + 2q_k} > \dots > \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}.$$

Полученные неравенства доказывают, что все подходящие и промежуточные дроби какого-либо иррационального числа составляют две последовательности — одну возрастающую, другую убывающую, сходящиеся к числу  $z$ .

Теперь можно перейти к решению основных вопросов.

**Теорема 1.** Если дробь  $\frac{p}{q}$  есть наилучшее приближение первого рода числа  $z$ , то она либо подходящая, либо промежуточная дробь разложения этого числа.

*Доказательство.* Рассмотрим отдельно два возможных случая:

$$1) \frac{p}{q} < z \quad \text{и} \quad 2) \frac{p}{q} > z.$$

В первом случае, допустив, что  $\frac{p}{q}$  не есть ни подходящая,

ни промежуточная дробь, заключаем, что либо  $\frac{p}{q} < \frac{p_0}{q_0}$ , либо  $\frac{p}{q}$  заключена между двумя членами возрастающей последовательности подходящих и промежуточных дробей:

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_0 + p_1}{q_0 + q_1}, \frac{p_0 + 2p_1}{q_0 + 2q_1}, \dots, \frac{p_0 + a_2p_1}{q_0 + a_2q_1} = \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_2 + p_3}{q_2 + q_3}, \dots, \frac{p_4}{q_4}, \dots \quad (2)$$

Пусть  $\frac{p}{q} < \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} < z$ . Тогда имеет место неравенство

$$\left| z - \frac{a_0}{1} \right| < \left| z - \frac{p}{q} \right|,$$

причем, очевидно,  $1 \leq q$ , т. е.  $\frac{p}{q}$  не есть наилучшее приближение. Следовательно, этот случай невозможен.

Пусть теперь дробь  $\frac{p}{q}$  заключена между двумя соседними членами последовательности (2):

$$\frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k} < \frac{p}{q} < \frac{p_{k-1} + (m+1)p_k}{q_{k-1} + (m+1)q_k} < z \quad (m = 0, 1, \dots, a_{k+1}-1). \quad (3)$$



Тогда

$$0 < \frac{p}{q} - \frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k} < \frac{p_{k-1} + (m+1)p_k}{q_{k-1} + (m+1)q_k} - \frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k} =$$

$$= \frac{1}{(q_{k-1} + mq_k)[q_{k-1} + (m+1)q_k]}$$

или, после умножения на  $q(q_{k-1} + mq_k)$ :

$$0 < p(q_{k-1} + mq_k) - q(p_{k-1} + mp_k) < \frac{q}{q_{k-1} + (m+1)q_k}.$$

Отсюда в силу целочисленности средней части неравенств следует, что правая часть больше единицы, т. е.

$$q > q_{k-1} + (m+1)q_k,$$

и таким образом опять приходим к противоречию, так как в силу (3) дробь  $\frac{p_{k-1} + (m+1)p_k}{q_{k-1} + (m+1)q_k}$  ближе к  $z$ , чем  $\frac{p}{q}$ , и, следовательно, должна иметь больший знаменатель, так как  $\frac{p}{q}$  есть наилучшее приближение числа  $z$ .

Таким образом для случая  $\frac{p}{q} < z$  теорема доказана. Очевидно, для случая  $\frac{p}{q} > z$  теорема доказывается тем же методом.

Вопрос о наилучших приближениях первого рода будет решен до конца, если выяснить, какие дроби из подходящих и промежуточных окажутся наилучшими приближениями, т. е. если разобрать теорему, обратную только что доказанной. Как уже упоминалось, общеизвестно, что всякая подходящая дробь является наилучшим приближением первого рода (доказательство можно получить как следствие нижеследующей леммы 1). Переходим поэтому к вопросу о промежуточных дробях.

**Лемма 1.** Если рациональная несократимая дробь  $\frac{p}{q}$  лучше аппроксимирует число  $z$ , чем его подходящая дробь  $\frac{p_k}{q_k}$ , т. е. если  $\left| z - \frac{a}{b} \right| < \left| z - \frac{p_k}{q_k} \right|$ , то имеет место равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{np_{k-1} + mp_k}{nq_{k-1} + mq_k}, \quad (4)$$

где правая часть есть несократимая дробь и числа  $m$  и  $n$  — целые, положительные.

**Доказательство.** Исходя из данного неравенства, можем утверждать, что  $\frac{p_k}{q_k} < \frac{a}{b} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  при  $k$  четном и  $\frac{p_k}{q_k} > \frac{a}{b} > \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  при  $k$  нечетном.

Таким образом разности  $\frac{p_k}{q_k} - \frac{a}{b}$  и  $\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  имеют знак, одинаковый с  $(-1)^{k-1}$ . Эти разности можно представить в таком виде:

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{a}{b} = \frac{bp_k - aq_k}{bq_k} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot n}{bq_k};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{aq_{k-1} - bp_{k-1}}{bq_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot m}{bq_{k-1}},$$

где  $m$  и  $n$ , очевидно, отличные от нуля, целые положительные числа. Из получающихся отсюда уравнений

$$bp_k - aq_k = (-1)^{k-1} \cdot n, \quad aq_{k-1} - bp_{k-1} = (-1)^{k-1} \cdot m$$

находим

$$a = np_{k-1} + mp_k \quad \text{и} \quad b = nq_{k-1} + mq_k,$$

что и доказывает лемму.

**Лемма 2.** Если дробь  $\frac{a}{b}$  удовлетворяет условиям предыдущей леммы и сверх того имеет знаменатель, меньший, чем знаменатель следующей подходящей дроби ( $b < q_{k+1}$ ), то

$$\frac{a}{b} = \frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k},$$

где  $m < a_{k+1}$ , т. е.  $\frac{a}{b}$  есть промежуточная дробь.

*Доказательство.* По лемме 1:

$$\frac{a}{b} = \frac{np_{k-1} + mp_k}{nq_{k-1} + mq_k}.$$

Учитывая общеизвестное равенство

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_{k-1} + a_{k+1} \cdot p_k}{q_{k-1} + a_{k+1} \cdot q_k}$$

и данное соотношение  $b < q_{k+1}$ , заключаем, что  $m < a_{k+1}$ . Остается доказать, что при этих условиях  $n = 1$ .

Если обозначить  $x = a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2} + \frac{1}{a_{k+3} + \dots}}$ , то

$$z = \frac{p_{k-1} + xp_k}{q_{k-1} + xq_k}.$$

Составим разности

$$z - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1} + xp_k}{q_{k-1} + xq_k} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k(q_{k-1} + xq_k)};$$

$$z - \frac{a}{b} = \frac{p_{k-1} + xp_k}{q_{k-1} + xq_k} - \frac{np_{k-1} + mp_k}{nq_{k-1} + mq_k} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (nx - m)}{(q_{k-1} + xq_k)(nq_{k-1} + mq_k)}.$$

Так как  $x > a_{k+1}$ ,  $n \geq 1$  и  $m < a_{k+1}$ , то  $nx - m > 0$ . Учитывая это обстоятельство из условия  $\left| z - \frac{a}{b} \right| < \left| z - \frac{p_k}{q_k} \right|$ , получим:

$$\frac{nx - m}{nq_{k-1} + mp_k} < \frac{1}{q_k}, \quad (5)$$

или

$$n < \frac{2mq_k}{xq_k - q_{k-1}}.$$

Чтобы доказать, что  $n = 1$ , достаточно доказать, что  $\frac{2mq_k}{xq_k - q_{k-1}} < 2$  или  $m < x - \frac{q_{k-1}}{q_k}$ , причем последнее неравенство достаточно доказать для наибольшего возможного значения  $m = a_{k+1} - 1$ .

Возьмем очевидное неравенство  $-1 < -\frac{q_{k-1}}{q_k}$  и сложим его почленно с неравенством  $a_{k+1} < x$ . Получим  $a_{k+1} - 1 < x - \frac{q_{k-1}}{q_k}$ , что и доказывает лемму.

**Замечание.** В условии леммы вместо требования, чтобы  $b < q_{k+1}$ , можно было потребовать, чтобы  $m < a_{k+1}$ , так как только это и нужно для того, чтобы доказать, что  $n = 1$ . Это замечание будет использовано ниже.

Решим теперь вопрос о том, какие из промежуточных дробей

$$u_{km} = \frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k} \quad (m = 1, 2, \dots, a_{k+1} - 1)$$

являются лучшими приближениями числа  $z$ , чем его подходящая дробь  $\frac{p_k}{q_k}$ . Для этого нужно составить разности  $z - \frac{p_k}{q_k}$  и  $z - u_{km}$  и найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы имело место неравенство

$$|z - u_{km}| < \left| z - \frac{p_k}{q_k} \right|.$$

Легко видеть, что для этого нужно повторить выкладки, сделанные при доказательстве леммы 2, заменив дробь  $\frac{a}{b}$  на  $u_{km}$ , для чего достаточно положить  $n = 1$ . Таким образом мы приходим к частному случаю неравенства (5) при  $n = 1$ , и следовательно, тем самым будет доказана следующая лемма.

**Лемма 3.** Из промежуточных дробей

$$u_{km} = \frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k}$$

те, и только те, лучше аппроксимируют число  $z$ , чем подходящая дробь  $\frac{p_k}{q_k}$ , для которых имеет место неравенство

$$\frac{x - m}{q_{k-1} + mq_k} < \frac{1}{q_k} \quad (6)$$

или

$$m > \frac{1}{2} \left( x - \frac{q_{k-1}}{q_k} \right). \quad (7)$$

Теперь можно до конца решить вопрос о промежуточных дробях.

**Теорема 2.** Из промежуточных дробей

$$u_{km} = \frac{p_{k-1} + mp_k}{q_{k-1} + mq_k} \quad (m = 1, 2, \dots, a_{k+1} - 1)$$

те, и только те, являются наилучшими приближениями первого рода числа  $z$ , для которых имеет место неравенство (7):

$$m > \frac{1}{2} \left( x - \frac{q_{k-1}}{q_k} \right),$$

где  $x = [a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$ .

**Доказательство.** Пусть  $m$  удовлетворяет неравенству (7). Докажем, что при этом условии из неравенства

$$\left| z - \frac{c}{d} \right| < \left| z - u_{km} \right|$$

следует  $d > q_{k-1} + mq_k$ , т. е., что  $u_{km}$  есть наилучшее приближение.

Так как  $m$  удовлетворяет (7), то по лемме 3 имеем:

$$\left| z - u_{km} \right| < \left| z - \frac{p_k}{q_k} \right|,$$

и следовательно,

$$\left| z - \frac{c}{d} \right| < \left| z - \frac{p_k}{q_k} \right|.$$

Но тогда по лемме 1

$$d = nq_{k-1} + lq_k; \quad c = np_{k-1} + lp_k,$$

где  $n$  и  $l$  — целые положительные числа.

Рассмотрим отдельно два случая:

$$1) \quad l < a_{k+1} \quad \text{и} \quad 2) \quad l \geq a_{k+1}.$$

Если  $l < a_{k+1}$ , то по лемме 2 (см. замечание к ней)  $n = 1$ , т. е.  $d = q_{k-1} + lq_k$ ,  $c = p_{k-1} + lp_k$ , и следовательно,  $\frac{c}{d}$  есть промежуточная дробь  $\frac{c}{d} = u_{kl}$ . Но в таком случае из неравенства

$\left| z - \frac{c}{d} \right| < |z - u_{km}|$  или  $|z - u_{kl}| < |z - u_{km}|$  на основании установленных выше свойств промежуточных дробей заключаем, что  $l > m$ , и следовательно,  $q_{k-1} + lq_k > q_{k-1} + mq_k$ , т. е.  $d > q_{k-1} + mq_k$ , что и требовалось доказать.

2. Если  $l \geq a_{k+1}$  (и, очевидно,  $n \geq 1$ ), то

$$d = nq_{k-1} + lq_k \geq nq_{k-1} + a_{k+1}q_k > q_{k-1} + mq_k.$$

Итак, если  $m$  удовлетворяет неравенству (7), то  $u_{km}$  есть наилучшее приближение первого рода.

Пусть теперь  $m$  не удовлетворяет (7). Тогда по лемме 3,  $u_{km}$  есть худшее приближение числа  $z$ , чем  $\frac{p_k}{q_k}$ , в то время, как  $q_k < q_{k-1} + mq_k$ . Следовательно,  $u_{km}$  в этом случае не есть наилучшее приближение первого рода и теорема доказана полностью.

## § 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

Если положить  $x = a_{k+1}$  и  $y = [0, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots]$ , то (7) можно переписать так:

$$m > \frac{a_{k+1}}{2} + \frac{1}{2} \left( y - \frac{q_{k-1}}{q_k} \right).$$

Так как  $0 < y < 1$  и  $0 < \frac{q_{k-1}}{q_k} < 1$ , то  $\left| y - \frac{q_{k-1}}{q_k} \right| < 1$ , и следовательно, (7) можно заменить условиями:

$$m > \frac{a_{k+1}}{2} \tag{8}$$

или  $m = \frac{a_{k+1}}{2}$  и при этом  $\frac{q_{k-1}}{q_k} > y$  (второе условие, очевидно, имеет смысл лишь при  $a_{k+1}$  четном). Если воспользоваться равенством (доказывается методом полной индукции):

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = [0, a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1],$$

то теорему 2 можно сформулировать так.

Промежуточная дробь  $u_{km}$  тогда, и только тогда, есть наилучшее приближение первого рода, если  $m > \frac{a_{k+1}}{2}$  или  $m = \frac{a_{k+1}}{2}$  и при этом  $[0, a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1] > [0, a_{k+2}, \dots, a_{k+3}, \dots]$ . Отсюда заключаем, что при  $a_{k+1}$  нечетном подходящие дроби  $u_{km}$  ( $k = 1, 2, \dots, a_{k+1} - 1$ ) распадаются в порядке индексов  $m$  на две равные группы, причем все дроби первой группы не являются наилучшими приближениями, а члены второй группы  $\left( m > \frac{a_{k+1}}{2} \right)$  являются наилучшими приближениями.

При  $a_{k+1}$  четном, в зависимости от знака разности  $y - \frac{q_{k-1}}{q_k}$ ,

одна из групп содержит одной дробью больше. В частности, при  $a_{k+1} = 2$  (т. е. когда имеется одна промежуточная дробь) либо „все“ промежуточные дроби являются наилучшими промежуточными, либо „все“ не являются наилучшими приближениями.

В связи с этим обстоятельством возникает такой вопрос: нет ли среди чисел, разложение которых в непрерывную дробь содержит в качестве частных знаменателей лишь единицы и двойки, таких, для которых все промежуточные дроби (т. е. при всех значениях  $k$ ) являются наилучшими приближениями или, наоборот, ни одна промежуточная дробь не есть наилучшее приближение.

На основании (8) можно утверждать, что имеют место первый случай, если при любом  $a_{k+1}$ , равном 2, будет

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} - y > 0,$$

и второй случай, если при любом  $a_{k+1} = 2$

$$y - \frac{q_{k-1}}{q_k} > 0.$$

Полное исследование вопроса о характере чисел обоих родов не представляет трудностей, но оказывается длинным и не приводит к изящному результату; поэтому ограничимся лишь примерами чисел того и другого рода. Можно доказать, например:

1. Если число раскладывается в чистую периодическую дробь с периодом, содержащим  $n$  единиц и одну следующую за ними двойку, то при  $n$  нечетном все промежуточные дроби есть наилучшие приближения и при  $n$  четном ни одна промежуточная дробь не есть наилучшее приближение.

2. Если период содержит одну двойку и  $n$  последующих единиц, то при  $n$  нечетном ни одна промежуточная дробь не есть наилучшее приближение и при  $n$  четном все промежуточные дроби — наилучшие приближения.

Доказательство основано на исследовании неравенства

$$[0, a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1] > [0, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots].$$

### § 3. О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ВТОРОГО РОДА

Докажем, что наилучшими приближениями второго рода могут быть лишь подходящие дроби.

**Лемма 4.** *Всякое наилучшее приближение второго рода есть также наилучшее приближение первого рода.*

**Доказательство.** Пусть дробь  $\frac{p}{q}$  — есть наилучшее приближение второго рода. Допустим, что она не есть наилучшее приближение первого рода, т. е. что возможно неравенство  $\left| z - \frac{a}{b} \right| <$

$< \left| z - \frac{p}{q} \right|$  при  $b < q$ . Но тогда верно неравенство  $b \left| z - \frac{a}{b} \right| < q \left| z - \frac{p}{q} \right|$  или  $|bz - a| < |qz - p|$  при  $b < q$ , что противоречит условию. Лемма доказана. Следовательно, наилучшими приближениями второго рода могут быть лишь подходящие и промежуточные дроби.

**Лемма 5.** Если  $\frac{a}{b}$  есть промежуточная дробь,  $\frac{a}{b} = u_{km}$ , то неравенство  $|bz - a| < |q_k z - p_k|$  невозможно.

*Доказательство.* Применяя тот же метод, что при доказательстве леммы 3, получим неравенство

$$x - m < 1,$$

которое и доказывает лемму.

**Следствие.** Промежуточная дробь  $u_{km} = \frac{p_{k-1} + mp_k}{p_{k-1} + mq_k}$  не может быть наилучшим приближением второго рода, так как она дает худшее приближение числа  $z$ , чем  $\frac{p_k}{q_k}$ , в то время как  $q_k < q_{k-1} + tq_k$ .

Теперь из лемм 4 и 5 заключаем, что наилучшими приближениями второго рода могут быть лишь подходящие дроби.

---

## ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Л. Я. Окунев (Москва)

В настоящей статье мы познакомим читателя с одним из наиболее алгебраических доказательств основной теоремы алгебры. Чтобы яснее представить себе идею<sup>1</sup> доказательства, обратимся к простейшему случаю — к квадратному уравнению

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

( $p$  и  $q$  — действительные числа).

Как известно, корни этого уравнения могут быть получены по формуле

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

лишь в том случае, когда

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0.$$

Если же

$$\frac{p^2}{4} - q < 0,$$

то уравнение (1) не будет иметь корней. Чтобы и этот случай не представлял исключения, приходится ввести числа новой природы — комплексные числа.

Основной причиной неразрешимости некоторых квадратных уравнений является невозможность извлечения квадратного корня из  $-1$ , т. е. неразрешимость уравнения

$$x^2 + 1 = 0.$$

Если же ввести новое число  $i$ , удовлетворяющее уравнению

$$i^2 + 1 = 0,$$

то любое квадратное уравнение окажется разрешимым относительно новых комплексных чисел, имеющих вид  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа.

Возникает естественный вопрос: не придется ли для разрешимости уравнения  $n$ -й степени

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> Идея этого доказательства восходит к Гауссу.



вводить еще новые числа помимо комплексных. Оказывается (в этом как раз и состоит основная теорема алгебры), что комплексных чисел достаточно для решения любого алгебраического уравнения. Для доказательства этой теоремы прежде всего введем важные понятия поля и алгебраического расширения.

В современной алгебре полем называется всякая система чисел, в которой выполнимы все четыре арифметические операции. Например, система всех рациональных чисел образует поле, так как сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел всегда рациональны. Другим примером поля может служить совокупность всех комплексных чисел. Напротив, система всех целых чисел не образует поля, так как в этой системе деление не всегда выполнимо: частное двух целых чисел может и не быть целым числом (так, 5 не делится на 2).

Несколько сложнее понятие алгебраического расширения. Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (n > 1)$$

— многочлен, неприводимый в поле действительных чисел, т. е. такой многочлен с действительными коэффициентами, который не разлагается на произведение многочленов с действительными же коэффициентами. Очевидно, что  $f(x)$  не имеет действительных корней, так как иначе было бы

$$f(x) = (x - \alpha)\varphi(x), \quad (3)$$

где  $\alpha$  — действительный корень и  $\varphi(x)$  — многочлен с действительными коэффициентами. Но тождество (3) противоречит неприводимости  $f(x)$ .

Введем теперь число  $j$  новой природы, определяемое условием

$$f(j) = a_0j^n + a_1j^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Легко видеть, что любой многочлен  $F(j)$  с действительными коэффициентами равен  $r(j)$ , где  $r(x)$  — остаток от деления  $F(x)$  на  $f(x)$ . В самом деле, обозначив частное через  $\varphi(x)$ , получим:

$$F(x) = f(x)\varphi(x) + r(x), \quad (4)$$

причем, очевидно, степень многочлена  $r(x)$  не превосходит  $n-1$ . Полагая в тождестве (4)  $x = j$ , будем иметь  $F(j) = r(j)$ , так как  $f(j) = 0$ .

*Алгебраическим расширением поля действительных чисел называется совокупность многочленов  $r(j)$ , а  $r(j)$  — числом алгебраического расширения.*

Простейшим примером алгебраического расширения может служить совокупность комплексных чисел. В данном случае роль неприводимого многочлена  $f(x)$  играет  $x^2 + 1$ , причем остатки  $r(x)$  суть линейные многочлены:  $r(x) = a + bx$ . Таким образом, если

ввести мнимое число  $i$ , удовлетворяющее уравнению  $i^2 + 1 = 0$ , то числа расширения  $r(i)$  окажутся многочленами вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа.

Итак, совокупность комплексных чисел образует алгебраическое расширение поля действительных чисел.

Аналогичным образом определяется *алгебраическое расширение поля комплексных чисел*. А именно, пусть  $f(x)$  — многочлен, неприводимый в поле комплексных чисел, т. е. такой многочлен с комплексными коэффициентами, который не разлагается на произведение многочленов с комплексными коэффициентами. Введем число  $j$  новой природы, для которого  $f(j) = 0$ , и обозначим через  $r(x)$  остаток от деления многочлена  $F(x)$  с комплексными коэффициентами на  $f(x)$ . *Алгебраическим расширением поля комплексных чисел мы назовем совокупность многочленов  $r(j)$ , а сами многочлены  $r(j)$  назовем числами расширения.*

До сих пор речь шла об алгебраическом расширении как о совокупности чисел  $r(j)$ . Теперь установим операции сложения и умножения над этими числами.

*Определение суммы.* Сложим два многочлена  $r_1(x)$  и  $r_2(x)$  и обозначим их сумму через  $r_3(x)$ :

$$r_1(x) + r_2(x) = r_3(x).$$

Тогда число  $r_3(j)$  мы назовем суммой чисел расширения  $r_1(j)$  и  $r_2(j)$  и будем писать:

$$r_1(j) + r_2(j) = r_3(j).$$

*Определение произведения.* Обозначим через  $h(x)$  произведение многочленов  $r_1(x)$  и  $r_2(x)$ :

$$r_1(x) \cdot r_2(x) = h(x).$$

Пусть  $h(x)$  при делении на неприводимый многочлен  $f(x)$ , порождающий расширение, дает остаток  $r_4(x)$ . Произведением двух чисел  $r_1(j)$  и  $r_2(j)$  мы назовем этот остаток  $r_4(j)$  и будем писать:

$$r_1(j) \cdot r_2(j) = r_4(j).$$

Для иллюстрации вернемся опять к области комплексных чисел, рассматривая ее как алгебраическое расширение поля действительных чисел. Мы уже знаем, что здесь  $r(x) = a + bx$ . Поэтому, если  $r_1(x) = a_1 + b_1x$ ,  $r_2(x) = a_2 + b_2x$ , то сумма многочленов  $r_1(x)$  и  $r_2(x)$  равна  $r_3(x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x$ , откуда

$$r_3(i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Следовательно, получается известное правило сложения комплексных чисел: чтобы сложить два комплексных числа, надо сложить отдельно их действительные и мнимые части.

Переходим к произведению комплексных чисел. Легко видеть, что  $h(x) = (a_1 + b_1x)(a_2 + b_2x) = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2x^2$  при де-

лении на  $f(x) = x^2 + 1$  дает остаток, равный  $r_4(x) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)x$ , откуда

$$r_1(i) \cdot r_2(i) = r_4(i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i,$$

т. е. таким путем получаем известное правило перемножения комплексных чисел.

Итак, мы определили операции сложения и умножения над числами расширения. Заметим теперь, что для любых двух чисел  $r_1(j)$  и  $r_2(j)$  уравнение  $r_1(j) + z = r_2(j)$  разрешимо. Пусть

$$r_3(x) = r_2(x) - r_1(x). \quad (5)$$

Легко видеть, что  $r_3(j)$  как раз и будет искомым решением:  $z = r_3(j)$ . В самом деле, согласно (5)

$$r_1(x) + r_3(x) = r_2(x),$$

откуда

$$r_1(j) + r_3(j) = r_2(j).$$

Этим доказана выполнимость вычитания. Несколько сложнее доказать выполнимость деления, т. е. разрешимость уравнения

$$r_1(j)z = r_2(j) \quad (r_1(j) \neq 0). \quad (6)$$

Многочлен  $r_1(x)$  взаимно прост с неприводимым многочленом  $f(x)$ . В самом деле, если бы  $r_1(x)$  и  $f(x)$  имели общего делителя  $d(x)$ , отличного от постоянной, то было бы

$$f(x) = d(x)\varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — также многочлен, отличный от постоянной, а это противоречит неприводимости  $f(x)$ .

Но если  $r_1(x)$  и  $f(x)$  взаимно просты, то, как известно, можно подобрать такие два многочлена  $h(x)$  и  $g(x)$ , что будет выполняться тождество<sup>1</sup>:

$$r_1(x)h(x) + f(x)g(x) = 1. \quad (7)$$

Пусть, далее,  $h(x)$  при делении на  $f(x)$  дает остаток, равный  $r(x)$ . Полагая в (7)  $x = j$ , получим в силу  $f(j) = 0$ , что

$$r_1(j)h(j) = 1,$$

или, так как  $h(j) = r(j)$ ,

$$r_1(j) \cdot r(j) = 1. \quad (8)$$

Я теперь утверждаю, что число

$$r(j)r_2(j) = r'(j) \quad (9)$$

есть решение уравнения (6). Действительно, согласно (9) и (8):

$$r_1(j)r'(j) = r_1(j)r(j)r_2(j) = 1 \cdot r_2(j) = r_2(j).$$

<sup>1</sup> Вывод этого тождества см. у Сушкевича „Основы высшей алгебры“, 1-е изд., стр. 66—68.

Условимся в дальнейшем обозначать поле действительных чисел символом  $P$ , а поле комплексных чисел — символом  $P_1$ . Допустим, что многочлен  $F(x)$  с комплексными коэффициентами не имеет комплексных корней. Пусть

$$F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_r(x),$$

где  $f_i(x)$  — многочлены выше первой степени, неприводимые в поле  $P_1$ . Возьмем первый многочлен  $f_1(x)$  и введем число новой природы  $x = j$ . Мы получим тогда алгебраическое расширение поля  $P_1$ . Обозначим это расширение через  $P_2$  и посмотрим, что произойдет с  $f_1$  в поле  $P_2$ . Прежде всего ясно, что в поле  $P_2$  уравнение  $f_1(x) = 0$ , и тем самым  $F(x) = 0$  будет уже разрешимо, а именно,  $x = j$  будет его корнем. Вообще, в поле  $P_2$  уравнение  $F(x) = 0$  будет иметь  $s$  корней  $j_1, j_2, \dots, j_s$  ( $j_1 = j$ ). Если  $s$  равно степени  $n$  многочлена  $F(x)$ , то в поле  $P_2$  многочлен  $F(x)$  разложится целиком на линейные множители:

$$F(x) = a_0(x - j_1) \cdot \dots \cdot (x - j_n).$$

В этом случае мы назовем  $P_2$  полем разложения  $F(x)$ .

Если же  $s < n$ , то

$$F(x) = (x - j_1) \cdot \dots \cdot (x - j_s) \varphi_1(x) \cdot \dots \cdot \varphi_k(x),$$

где  $\varphi_1(x) \cdot \dots \cdot \varphi_k(x)$  — многочлены выше первой степени, неприводимые в  $P_2$ , т. е. такие многочлены с коэффициентами из  $P_2$ , которые не разлагаются на произведение многочленов с коэффициентами из  $P_2$ .

Всю нашу прежнюю теорию можно дословно перенести и на полином  $\varphi_1(x)$ . А именно, вводя новое число  $j_{s+1}$ , для которого  $\varphi_1(j_{s+1}) = 0$ , мы расширим  $P_2$  до нового поля  $P_3$ ; в этом поле многочлен  $F(x)$  будет иметь  $s_1 > s$  корней:

$$F(x) = (x - j_1) \cdot \dots \cdot (x - j_s) (x - j_{s+1}) \cdot \dots \cdot (x - j_{s_1}) \omega_1(x) \cdot \dots \cdot \omega_p(x),$$

где  $\omega_i(x)$  — многочлены выше первой степени, неприводимые в  $P_3$ . Иными словами, в поле  $P_3$  многочлен  $F(x)$  распадется на большее число линейных множителей. Этот процесс расширения, однако, нельзя продолжать бесконечно; не более чем через  $n$  шагов мы придем к такому полю  $P_m$ , в котором  $F(x)$  распадается целиком на линейные множители:

$$F(x) = a_0(x - j_1) \cdot \dots \cdot (x - j_n).$$

Таким образом  $P_m$  будет полем разложения  $F(x)$ , и мы доказали следующую теорему.

**Теорема I.** Для всякого многочлена  $F(x)$  с комплексными (в частности, действительными) коэффициентами можно получить поле разложения с помощью конечного числа последовательных расширений.

Все наши усилия будут теперь направлены к тому, чтобы показать, что поле разложения всегда совпадает с полем комплексных чисел.

Большое значение имеет следующая теорема.

**Теорема II.** *Всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.*

**Доказательство.** При достаточно большом по абсолютной величине значении  $x$  многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

имеет знак своего старшего члена  $a_0x^n$ . Но в силу нечетности  $n$   $a_0x^n$  имеет разные знаки при  $x > 0$  и  $x < 0$ . Таким образом если  $M$  — достаточно большое положительное число, то  $f(+M)$  будет иметь знак, противоположный знаку  $f(-M)$ , откуда в силу непрерывности<sup>1</sup> многочлена  $f(x)$  должно существовать такое число  $x = x_0$ , лежащее между  $-M$  и  $+M$ , что  $f(x_0) = 0$ .

Теперь можно приступить к доказательству основной теоремы алгебры, разобрав предварительно следующие леммы.

**Лемма I.** *В поле разложения многочлен, неприводимый в области  $P$  действительных чисел, не может иметь общих корней со своей производной  $f'(x)$ .*

**Доказательство.** Допустим, напротив, что в поле разложения  $f(x)$  корень  $\alpha$  является также корнем производной  $f'(x)$ , т. е.  $f'(\alpha) = 0$ . Тогда должен существовать многочлен наименьшей степени<sup>2</sup>  $g(x)$  с действительными коэффициентами, для которого  $\alpha$  есть корень. Разделим  $f(x)$  на этот многочлен  $g(x)$ . Пусть

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x);$$

степень  $r(x)$ , очевидно, ниже степени  $g(x)$ . Полагая  $x = \alpha$ , получим

$$f(\alpha) = 0 = r(\alpha),$$

откуда  $r(x) = 0$ , так как иначе  $\alpha$  было бы корнем многочлена  $r(x)$  более низкой степени, чем  $g(x)$ .

Но если  $r(x) = 0$ , то

$$f(x) = g(x)q(x),$$

что противоречит неприводимости  $f(x)$ .

**З а м е ч а н и е.** В поле разложения неприводимый многочлен  $f(x)$  не имеет кратных корней, так как иначе  $f(x)$  имело бы со своей производной общий корень.

**Лемма II.** *Пусть в поле разложения многочлен  $f(x)$ , неприводимый в  $P$ , имеет корни  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Тогда  $\alpha_i + \alpha_k$  и  $\alpha_i \alpha_k$  ( $1 \leq i < k \leq n$ ) будут также корнями многочленов с действительными коэффициентами.*

<sup>1</sup> Единственное место в нашем изложении, где используется непрерывность многочлена; см. Сушкевич, Высшая алгебра, теорема § 62, стр. 102.

<sup>2</sup> Причем степень  $g(x)$  будет заведомо меньше степени  $f(x)$ , так как если не существует такого многочлена степени ниже  $n-1$ , то им будет производная  $f'(x)$ .

*Доказательство.* Прежде всего докажем лемму для  $\alpha_i + \alpha_k$ .  
Я утверждаю, что многочлен

$$g(x) = [x - (\alpha_1 + \alpha_2)] [x - (\alpha_1 + \alpha_3)] \dots [x - (\alpha_{n-1} + \alpha_n)]$$

будет искомым многочленом с действительными коэффициентами.

В самом деле, совершенно очевидно, что  $\alpha_i + \alpha_k$  суть корни  $g(x)$ . Во-вторых, если  $\alpha_i$  заменить через  $\alpha_j$  и  $\alpha_j$  — через  $\alpha_i$ , то многочлен от этого не изменится, — может произойти только перестановка его линейных множителей. Таким образом коэффициенты  $g(x)$  суть симметрические функции корней  $\alpha_i$  многочлена  $f(x)$ . Согласно основной теореме теории симметрических функций отсюда следует, что коэффициенты  $g(x)$  суть действительные числа.

Точно так же доказывается лемма и для  $\alpha_i \alpha_k$ , стоит только обратиться к многочлену

$$h(x) = (x - \alpha_1 \alpha_2)(x - \alpha_1 \alpha_3) \dots (x - \alpha_{n-1} \alpha_n).$$

*Лемма III.* Всегда можно подобрать такое действительное число  $s$ , что  $\alpha_i \alpha_k + s(\alpha_i + \alpha_k)$  будут все различны ( $\alpha_j$  имеют тот же смысл, что и в предыдущей лемме).

*Доказательство.* Покажем прежде всего, что если по крайней мере одно из чисел  $s, t$  отлично от  $i$  или  $k$ , то выражения

$$\alpha_i \alpha_k - \alpha_s \alpha_t \text{ и } (\alpha_i + \alpha_k) - (\alpha_s + \alpha_t) \quad (i < k; s < t)$$

не могут одновременно обращаться в нуль. Допустим для определенности, что  $t \neq k$  и пусть, напротив,

$$\alpha_i \alpha_k - \alpha_s \alpha_t = 0 \quad \text{и} \quad (\alpha_i + \alpha_k) - (\alpha_s + \alpha_t) = 0.$$

Тогда из первого равенства следует

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_t} = \frac{\alpha_s}{\alpha_k} = \varrho,$$

или

$$\alpha_i = \varrho \alpha_t; \quad \alpha_s = \varrho \alpha_k.$$

Подставляя эти значения  $\alpha_i$  и  $\alpha_s$  во второе равенство, получим

$$(\varrho \alpha_t + \alpha_k) - (\varrho \alpha_k + \alpha_t) = (\varrho - 1)(\alpha_t - \alpha_k) = 0.$$

Но в силу замечания в лемме I  $\alpha_t \neq \alpha_k$ , откуда  $\varrho - 1 = 0$  или  $\varrho = 1$ . Но тогда  $\alpha_i = \alpha_t$  и  $\alpha_s = \alpha_k$ , что согласно тому же замечанию возможно лишь при  $i = t$  и  $s = k$ ; но это противоречит неравенствам  $i < k$  и  $s < t$ .

Таким образом каждое из уравнений

$$\alpha_i \alpha_k + (\alpha_i + \alpha_k)x = \alpha_s \alpha_t + (\alpha_s + \alpha_t)x$$

(одно из чисел  $s, t$  отлично от  $i$  или  $k$ ), или

$$[(\alpha_i + \alpha_k) - (\alpha_t + \alpha_s)]x = \alpha_s \alpha_t - \alpha_i \alpha_k \quad (10)$$

либо имеет одно решение, либо вовсе не имеет решений. Выбрав действительное число  $s$ , отличное от решения уравнений (10), мы как раз и придем к утверждению леммы.

**Лемма IV.** Если  $\alpha_i \alpha_k + c$  ( $\alpha_i + \alpha_k$ ) комплексное число ( $\alpha_i$ ,  $\alpha_k$  и  $c$  имеют тот же смысл, что и в предыдущей лемме), то  $\alpha_i$  и  $\alpha_k$  также комплексные числа.

*Доказательство.* Положим

$$\alpha_i \alpha_k + c (\alpha_i + \alpha_k) = u.$$

Мы знаем (см. лемму II), что  $\alpha_i \alpha_k$  и  $\alpha_i + \alpha_k$  являются корнями многочленов  $g(x)$  и  $h(x)$  с действительными коэффициентами. Рассмотрим теперь многочлен

$$h(u - cx) = \varphi(x)$$

с комплексными коэффициентами. Очевидно, что  $x = \alpha_i + \alpha_k$  будет корнем  $\varphi(x)$ . Таким образом  $g(x)$  и  $\varphi(x)$  имеют один, и притом только один, общий корень, так как согласно лемме III

$$\begin{aligned} u - c(\alpha_i + \alpha_k) &\neq \alpha_i \alpha_k, \\ \varphi(\alpha_i + \alpha_k) &\neq 0. \end{aligned}$$

Разложим  $g(x)$  и  $\varphi(x)$  на многочлены, неприводимые в поле комплексных чисел:

$$\begin{aligned} g(x) &= g_1(x) g_2(x) \dots g_l(x); \\ \varphi(x) &= \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_m(x). \end{aligned}$$

Пусть для определенности  $g_1(x)$  и  $\varphi_1(x)$  имеют  $\alpha_i + \alpha_k$  общим корнем. В силу неприводимости  $g_1(x)$  и  $\varphi_1(x)$

$$g_1(x) = k \varphi_1(x),$$

где  $k$  — некоторое комплексное число. Из этого тождества следует, что  $g_1(x)$  и  $\varphi_1(x)$  могут быть только первой степени, так как иначе  $g_1(x)$  и  $\varphi_1(x)$  имели бы помимо  $\alpha_i + \alpha_k$  другие общие корни. Следовательно,

$$g_1(x) = a_1 x - b_1,$$

где  $a_1$  и  $b_1$  — комплексные числа, откуда

$$a_1(\alpha_i + \alpha_k) - b_1 = 0,$$

или

$$\alpha_i + \alpha_k = \frac{b_1}{a_1} = -p.$$

Наконец, из  $\alpha_i \alpha_k = u - c(\alpha_i + \alpha_k) = u + cp = q$  получается, что  $\alpha_i \alpha_k$  — также комплексное число. Итак, выходит, что  $\alpha_i$  и  $\alpha_k$  суть корни квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  с комплексными коэффициентами. Но это уравнение имеет комплексные корни, и лемма доказана.

Теперь мы в состоянии приступить к выводу основной теоремы алгебры.

**Основная теорема алгебры.** Всякий многочлен с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.

*Доказательство.* Теорему можно считать доказанной для многочленов нечетной степени (см. теорему II). Поэтому воспользуемся методом индукции: пусть теорема доказана для всех степеней вида  $2^k Q$  ( $0 \leq k < m$ ), где  $Q$  — произвольное нечетное число, и покажем справедливость теоремы для многочлена  $f(x)$  степени  $n = 2^m q$  ( $q$  — нечетно).

Разложим  $f(x)$  на множители, неприводимые в поле действительных чисел [в частности,  $f(x)$  может быть и неприводимым]:

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_r(x).$$

По крайней мере один из неприводимых многочленов  $f_i(x)$  должен быть степени  $n_i = 2^{k_i} q_i$  ( $0 \leq k_i \leq m$ ;  $q_i$  — нечетно). И в самом деле, если бы все  $k_i$  были больше  $m$ , то степень  $f(x)$  была бы равна

$$n = 2^{k_1} q_1 + 2^{k_2} q_2 + \dots + 2^{k_r} q_r = 2^p q',$$

где  $p > m$ ;  $q'$  — нечетно. Но это невозможно, так как мы выше предположили, что  $n = 2^m q$ .

Если, например,  $f_1(x)$  имеет степень вида  $2^{k_i} q_i$ ,  $0 \leq k_i \leq m-1$ , то в силу индуктивного предположения этот многочлен будет иметь по крайней мере один комплексный корень и этот корень, очевидно, будет также корнем многочлена  $f(x)$ .

Поэтому разберем тот случай, когда степень одного из многочленов  $f_i(x)$  равна  $2^m Q$ . Пусть для определенности степень  $n_1$  многочлена  $f_1(x)$  равна  $2^m Q$ .

Возьмем такое действительное число  $c$ , чтобы  $\frac{n_1(n_1-1)}{2}$  выражений  $a_i a_k + c(a_i + a_k)$  [ $a_i$  — корни  $f_1(x)$  в поле разложения;  $1 \leq i < k \leq n$ ] были все различны. Согласно лемме III такое  $c$  всегда можно подобрать. Выбрав соответствующее  $c$ , составим многочлен

$$g(x) = \{x - [a_1 a_2 + c(a_1 + a_2)]\} \{x - [a_1 a_3 + c(a_1 + a_3)]\} \dots \\ \dots \{x - [a_{n_1-1} a_{n_1} + c(a_{n_1-1} + a_{n_1})]\}.$$

Очевидно, что степень  $g(x)$  равна  $\frac{n_1(n_1-1)}{2} = 2^{m-1} Q (2^{m-1} Q - 1) = 2^{m-1} Q'$  ( $Q'$  — нечетное число). Кроме того,  $g(x)$  — многочлен с действительными коэффициентами, так как его коэффициенты суть симметрические функции корней  $f_1(x)$ . Следовательно, в силу индуктивного предположения  $g(x)$  имеет по крайней мере один комплексный корень. Пусть это будет  $a_i a_k + c(a_i + a_k)$ . Согласно лемме IV отсюда следует, что  $a_i$  и  $a_k$  — комплексные числа, что и требовалось доказать.

**Следствие I.** *Многочлен, неприводимый в поле действительных чисел, не может быть выше второй степени.*

В самом деле, пусть неприводимый многочлен  $f(x)$  выше первой степени. Тогда согласно основной теореме  $f(x)$  будет иметь недействительный комплексный корень  $x_0$ . Но, как известно,



сопряженное комплексное число  $x_0$  также будет корнем  $f(x)$ , откуда

$$f(x) = (x - x_0)(x - \bar{x}_0) \varphi(x) \quad [x^2 - (x_0 + \bar{x}_0)x + x_0\bar{x}_0] \varphi(x).$$

В квадратной скобке стоит многочлен с действительными коэффициентами,  $\varphi(x)$  должно быть также либо многочленом с действительными коэффициентами, либо действительным числом. В силу неприводимости  $f(x)$  остается последнее:  $\varphi(x) = c$ , откуда

$$f(x) = c [x^2 - (x_0 + \bar{x}_0)x + x_0\bar{x}_0] = c(x - x_0)(x - \bar{x}_0).$$

*Следствие II. Поле комплексных чисел есть поле разложения любого многочлена с действительными коэффициентами.*

Разложим  $f(x)$  на произведение многочленов, неприводимых в поле действительных чисел:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x) \dots f_r(x). \quad (11)$$

В силу следствия I либо

$$f_i(x) = c_i(x - x_i)(x - \bar{x}_i),$$

либо  $f_i(x)$  линейно, т. е.

$$f_i(x) = c_i(x - x_i).$$

Подставляя эти значения  $f_i(x)$  в (11), получим разложение  $f(x)$  на линейные множители.

*Следствие III. Поле комплексных чисел есть также поле разложения и для многочленов с комплексными коэффициентами.*

Для доказательства возьмем наряду с многочленом  $f(x)$  многочлен  $f_1(x)$ , коэффициенты которого сопряжены коэффициентам  $f(x)$ . Стало быть

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \\ f_1(x) &= \bar{a}_0x^n + \bar{a}_1x^{n-1} + \dots + \bar{a}_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь  $f(x)f_1(x) = F(x)$ . Пусть

$$F(x) = c_0x^{2n} + c_1x^{2n-1} + \dots + c_{2n}.$$

Легко сообразить, что

$$c_i = \sum a_k a_l = \frac{1}{2} \sum (a_k a_l + a_l \bar{a}_k),$$

где суммирование совершается по всем значениям индексов, для которых  $k + l = i$ .

В каждой скобке находится сумма двух сопряженных чисел (например,  $a_0 a_i$  сопряжено с  $a_i a_0$  и т. д.), и потому каждая скобка представляет действительное число. Таким образом коэффициенты  $c_i$

многочлена  $F(x)$  действительны, и мы можем обратиться к следствию II. Согласно этому следствию

$$F(x) \equiv c_0 (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_{2n}),$$

откуда на долю  $f(x)$  придется  $n$  линейных множителей:

$$f(x) = a_0 (x - \beta_{n1})(x - \beta_{n2}) \dots (x - \beta_{in}).$$

## ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Д. И. Перепелкин (Москва)

Существующие определения кривых второго порядка можно распределить в следующие три группы:

1. Аналитическое определение—кривая второго порядка есть совокупность точек, координаты которых связаны уравнением второй степени.

2. Синтетические определения, основанные на проективных свойствах кривых; сюда относятся определение кривых второго порядка с помощью двух проективных пучков (Штейнер) и определение их с помощью плоской полярной системы (Штаудт).

3. Синтетические определения, основанные на элементарных метрических свойствах кривых. Из всех возможных определений этого типа особое значение будет иметь для нас определение кривых второго порядка как *геометрического места точек на плоскости, отношение расстояний которых от данной точки  $F$  и от данной прямой  $d$  имеет постоянное значение  $e$* . При  $e < 1$  получается эллипс, при  $e > 1$ —гипербола, при  $e = 1$ —парабола. Лишь частный вид кривой второго порядка (окружность) не охватывается этим определением; для ее получения необходим предельный переход при изменении формы уже определенных кривых.

Если мы от кривых второго порядка обратимся к поверхностям второго порядка, то увидим, что употребительные определения относятся лишь к первым двум из указанных выше типов. А именно, весьма распространенным является аналитическое их определение с помощью уравнения второй степени. Известны также синтетические определения этих поверхностей, а именно, определение линейчатых поверхностей с помощью двух проективных пучков плоскостей или рядов точек (Штейнер), определение поверхностей второго порядка с помощью двух коррелятивных связок (Зейдевич) и с помощью пространственной полярной системы (Штаудт). Весьма мало распространены определения третьего типа.

В настоящей работе мы покажем возможность распространить в простейших случаях на поверхности второго порядка (с необходимыми видоизменениями) отмеченное выше определение кривых второго порядка как геометрического места точек, для кото-

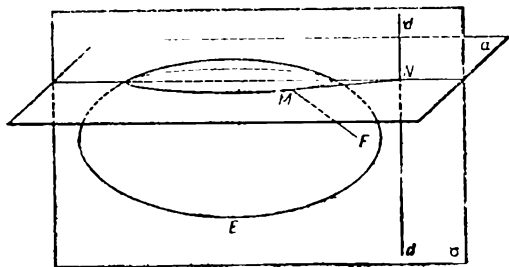
рых отношение расстояний от данной точки и данной прямой сохраняет постоянное значение<sup>1</sup>.

§ 1. В основе наших дальнейших рассуждений будет лежать следующая хорошо известная теорема.

**Теорема I.** *Геометрическое место точек пространства, отношение расстояний которых от двух данных точек  $M$  и  $M'$  имеет постоянное значение, есть сфера; центр этой сферы лежит на прямой  $MM'$ .*

Пользуясь этой теоремой, мы можем доказать следующее предложение.

**Теорема II.** *Геометрическое место точек  $M$  в пространстве, для которых отношение расстояния от данной точки  $F$  к расстоянию (кратчайшему) до данной прямой  $d$  имеет постоянное значение  $e$ , будет сжатым эллипсоидом вращения при  $e < 1$ , однополостным гиперболоидом вращения при  $e > 1$  и параболическим цилиндром при  $e = 1$ .*



Фиг. 1.

**Доказательство.** 1. Мы начнем с рассмотрения случая  $e < 1$  (фиг. 1) и применим к исследованию искомого геометрического места обычный метод изучения поверхностей—метод плоских сечений. Сечение искомого геометрического места плоскостью  $\sigma$ , соединяющей точку  $F$  с прямой  $d$ , будет согласно предыдущему эллипсом  $E$  с фокусом  $F$  и директрисой  $d$ . Рассмотрим теперь сечение искомого геометрического места какой-либо плоскостью  $\alpha$ , перпендикулярной к прямой  $d$ . По условию теоремы имеем для всех точек этого сечения соотношение

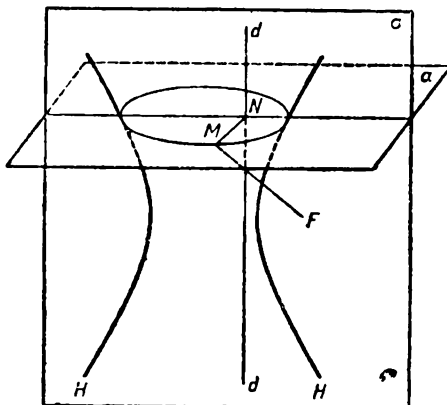
$$\frac{FM}{MN} = e, \quad (1)$$

причем положение точки  $N$  на прямой  $d$  будет одно и то же при любом положении точки  $M$  в плоскости  $\alpha$ . Если мы теперь рассмотрим геометрическое место точек пространства, для которых выполняется условие (1) при фиксированных точках  $F$  и  $N$ , то получим по теореме I сферу; следовательно, в плоскости  $\alpha$  точка  $M$ , удовлетворяющая условию (1), описывает окружность. Таким образом показано, что искомое геометрическое место пересекает плоскость  $\alpha$  по окружности (или вообще ее не пересекает). Центр этой окружности будет лежать в плоскости  $\sigma$ , соединяющей  $F$  с  $d$ , так как эта плоскость есть плоскость симметрии искомого геометрического места в силу условий теоремы.

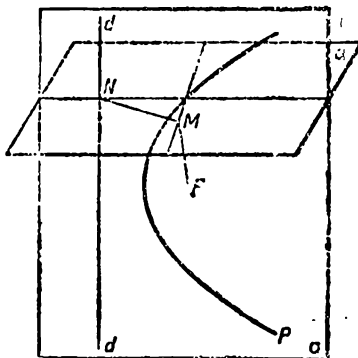
<sup>1</sup> Относительно общего случая соответствующего определения см. Schröter, Theorie der Flächen zweiter Ordnung, 1880, стр. 623—641.

Из доказанного следует, что искомое геометрическое место получится, если на хордах эллипса  $E$ , перпендикулярных к его директрисе, построить, как на диаметрах, ряд окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к плоскости эллипса  $E$ . Но это построение дает, очевидно, сжатый эллипсоид вращения, имеющий  $E$  своим меридианом.

2. В случае  $e > 1$  получаем в плоскости  $\sigma$ , соединяющей  $F$  с  $d$ , гиперболу  $H$  (фиг. 2). В каждой из плоскостей  $\alpha$ , перпенди-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

дикулярных к  $d$ , получим, как и в случае эллипса, окружность, построенную, как на диаметре, на хорде гиперболы, перпендикулярной к ее директрисе. Отсюда и следует, что искомое геометрическое место есть однополостный гиперболоид вращения, имеющий гиперболу  $H$  своим меридианом.

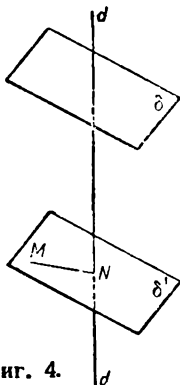
3. Наконец, в случае  $e = 1$  получаем в плоскости  $\sigma$  параболу  $P$  (фиг. 3). В плоскости  $\alpha$ , перпендикулярной к прямой  $d$ , мы должны найти те точки  $M$ , для которых

$$FM = MN. \quad (2)$$

Если рассматривать геометрическое место точек  $M$  пространства, для которых справедливо условие (2) при фиксированных точках  $F$  и  $N$ , то получим плоскость, перпендикулярную к плоскости  $\sigma$ ; следовательно, в плоскости  $\alpha$  точки  $M$  образуют прямую, перпендикулярную к плоскости  $\sigma$ . Таким образом искомое геометрическое место состоит из прямых, перпендикулярных к плоскости  $\sigma$ , проведенных через все точки параболы  $P$ , т. е. представляет собой параболический цилиндр. Тем самым теорема II доказана полностью.

§ 2. Из теоремы II мы видим, что непосредственное перенесение в пространство интересующего нас определения кривых второго порядка дает лишь весьма частные виды поверхностей второго порядка. Можно получить и поверхности второго порядка общего вида, если в этом определении выражение „расстояние точки от

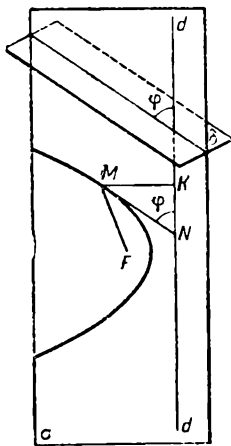
прямой" понимать не в смысле „кратчайшего расстояния“, а в более широком смысле, который мы сейчас укажем. Пусть даны точка  $M$ , прямая  $d$ , через нее не проходящая, и некоторая плоскость  $\delta$ , не параллельная прямой  $d$  (фиг. 4). Вместо того, чтобы измерять расстояние точки  $M$  от прямой  $d$  по перпендикуляру к этой прямой, будем измерять это расстояние по прямой, параллельной плоскости  $\delta$ .



Фиг. 4.

Точнее, назовем *направленным расстоянием точки  $M$  от прямой  $d$  отрезок, параллельный плоскости  $\delta$  и соединяющий точку  $M$  с одной из точек  $N$  прямой  $d$* ; плоскость  $\delta$  назовем *направляющей плоскостью*. Для построения направленного расстояния точки  $M$  от прямой  $d$  достаточно провести через  $M$  плоскость  $\delta'$ , параллельную плоскости  $\delta$ : точка пересечения плоскости  $\delta'$  с прямой  $d$  и определяет положение точки  $N$ . В частном случае, когда плоскость  $\delta$  перпендикулярна к  $d$ , направленное расстояние обращается в расстояние точки от прямой в обычном смысле слова.

§ 3. Рассмотрим то же геометрическое место, что и в теореме II, заменив понятие кратчайшего расстояния точки от прямой понятием направленного расстояния. Ограничиваясь при этом случаем, когда



Фиг. 5.

направляющая плоскость  $\delta$  перпендикулярна к плоскости  $\sigma$ , соединяющей точку  $F$  с прямой  $d$ , докажем следующую теорему:

**Теорема III.** Пусть в пространстве даны точка  $F$ , прямая  $d$ , через нее не проходящая, и направляющая плоскость  $\delta$ , перпендикулярная к плоскости  $\sigma$ , соединяющей точку  $F$  с прямой  $d$ . Геометрическое место точек  $M$  пространства, для которых отношение расстояния от точки  $F$  к направленному расстоянию от прямой  $d$  имеет постоянное значение  $e$ , представляет собой поверхность второго порядка. Если через  $\varphi$  обозначить угол прямой  $d$  с направляющей плоскостью  $\delta$ , то эта поверхность будет:

эллипсоидом, если  $e < \sin \varphi$ ,  
 эллиптическим параболоидом, если  $e = \sin \varphi$ ,  
 двуполостным гиперboloидом, если  $\sin \varphi < e < 1$ ,

гиперболическим цилиндром, если  $e = 1$ ,  
 однополостным гиперboloидом, если  $e > 1$ .

**Доказательство.** 1. Исследуем прежде всего сечение рассматриваемого геометрического места плоскостью  $\sigma$ , соединяющей  $F$  с  $d$ . Для каждой точки сечения имеем (фиг. 5):

$$\frac{FM}{MN} = e, \quad (3)$$

причем  $MN$  образует с прямой  $d$  угол  $\varphi$ , как это вытекает из определения направленного расстояния. Опуская из точки  $M$  перпендикуляр  $MK$  на прямую  $d$ , получим:

$$MK = MN \sin \varphi,$$

и, следовательно,

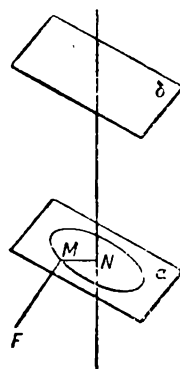
$$\frac{FM}{MK} = \frac{e}{\sin \varphi} = r_0 = \text{const.} \quad (4)$$

Отсюда следует, что сечение искомого геометрического места плоскостью  $\sigma$  будет кривая второго порядка, а именно эллипс при  $e < \sin \varphi$ , парабола при  $e = \sin \varphi$  и гипербола при  $e > \sin \varphi$ .

2. Рассмотрим, далее, сечение исследуемого геометрического места плоскостью  $\alpha$ , параллельной направляющей плоскости (фиг. 6). При перемещении точки  $M$  по этой плоскости основание  $N$  направленного расстояния  $MN$  точки  $M$  от прямой  $d$  сохраняет на прямой  $d$  постоянное положение  $N$ . По условию теоремы имеем:

$$\frac{FM}{MN} = e. \quad (3)$$

Если рассмотрим геометрическое место точек  $M$  пространства, для которых выполняется условие (3) при фиксированных точках  $F$  и  $N$ , то получим по теореме I сферу, если  $e \neq 1$ ; следовательно, в плоскости  $\alpha$  точка  $M$  описывает окружность. Центр этой окружности будет лежать в плоскости  $\sigma$ . При  $e = 1$  получим в плоскости  $\alpha$  прямую, перпендикулярную к плоскости  $\sigma$ .



Фиг. 6.

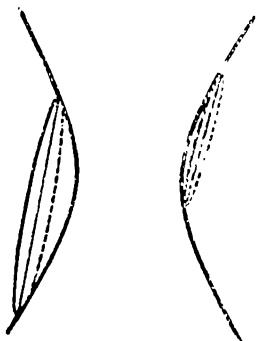
3. Если  $e < \sin \varphi$ , то в плоскости  $\sigma$  имеем эллипс, и на хордах этого эллипса, параллельных плоскости  $\delta$ , как на диаметрах, построены окружности, плоскости которых перпендикулярны плоскости эллипса. Очевидно, что это построение дает эллипсоид. В частном случае, если  $\varphi = 90^\circ$ , получаем рассмотренный в теореме II сжатый эллипсоид вращения.

4. Если  $e = \sin \varphi$ , в плоскости  $\sigma$  имеем параболу. Искомая поверхность образована окружностями, построенными, как на диаметрах, на хордах этой параболы, параллельных плоскости  $\delta$ , причем плоскости этих окружностей перпендикулярны плоскости параболы. Это построение приводит, очевидно, к эллиптическому параболоиду.

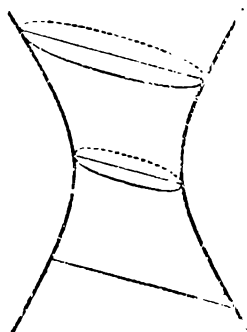
5. Если  $\sin \varphi < e$ ;  $e \neq 1$ , в плоскости  $\sigma$  имеем гиперболу. На хордах этой гиперболы, параллельных плоскости  $\delta$ , как на диаметрах построен ряд окружностей, плоскости которых перпендикулярны плоскости гиперболы. Искомое геометрическое место будет поэтому гиперболоидом, и притом двуполостным или

однополостным, смотря по тому, пересекает ли каждая хорда, параллельная плоскости  $\delta$ , только одну ветвь гиперболы (фиг. 7) или обе ее ветви (фиг. 8). Первый случай будет иметь место, как нетрудно видеть, если  $\sin \varphi < \frac{1}{e_0}$ , где  $e_0$  — эксцентриситет

гиперболы. Но  $e_0 = \frac{e}{\sin \varphi}$  в силу (4), так что предыдущее неравенство переходит в  $e < 1$ . Второй случай (пересечения хорды параллельной плоскости  $\delta$  с обеими ветвями гиперболы) будет иметь место при  $e > 1$ . Итак, гиперболоид будет двуполостным, если  $\sin \varphi < e < 1$ , и однополостным, если  $e > 1$ .



Фиг. 7.



Фиг. 8.

6. Наконец, если  $e = 1$ , получаем в плоскости  $\sigma$  гиперболу. Искомое геометрическое место образовано прямыми, перпендикулярными плоскости  $\sigma$ , проходящими через каждую точку гиперболы, и представляет собой гиперболический цилиндр.

Таким образом теорема доказана вполне.

§ 4. Из самого содержания теоремы III и ее доказательства вытекает, что рассматриваемое геометрическое место представляет собой самую общую поверхность второго порядка каждого из перечисленных в условии теоремы типов. Действительно, выбирая произвольно расстояние точки  $F$  от прямой  $d$  и величину  $e_0 = \frac{e}{\sin \varphi}$ , можно получить в плоскости  $\sigma$  произвольную

кривую второго порядка. Выбирая затем произвольно угол  $\varphi$ , характеризующий наклон круговых сечений поверхности, мы, очевидно, получаем наиболее общую поверхность данного типа. Исключение представляют лишь вытянутый эллипсоид вращения, параболоид вращения и двуполостный гиперболоид вращения, которые приходится рассматривать как предельные формы поверхностей общего вида при условии, что  $\varphi$  стремится к нулю.

Заметим еще, что из указанного в теореме III построения непосредственно вытекает существование второго семейства круговых сечений у каждой из рассмотренных поверхностей (кроме, конечно, гиперболического цилиндра). Действительно, в силу

условий теоремы плоскость, проведенная через точку  $F$  перпендикулярно к прямой  $d$ , будет плоскостью симметрии поверхности. Следовательно, сечения каждой поверхности, симметричные относительно этой плоскости с круговыми сечениями, рассмотренными при доказательстве теоремы, дают второе семейство круговых сечений поверхности.

§ 5. Среди поверхностей, получаемых путем, указанным в теореме III, отсутствует гиперболический параболоид. Это объясняется тем обстоятельством, что мы в целях упрощения исследования предположили, что направляющая плоскость  $\delta$  перпендикулярна к плоскости  $\sigma$ , соединяющей точку  $F$  с прямой  $d$ . Если отказаться от этого ограничения, то можно получить и гиперболический параболоид. А именно, методом, аналогичным тому, который был нами использован при доказательстве теоремы III, можно доказать следующее предложение:

**Теорема IV.** Пусть в пространстве даны точка  $F$ , прямая  $d$ , через нее не проходящая, и направляющая плоскость  $\delta$ , параллельная перпендикуляру, опущенному из точки  $F$  на прямую  $d$ . Геометрическое место точек  $M$  пространства, для которых их расстояние от точки  $F$  равно направленному расстоянию от прямой  $d$ , будет гиперболический параболоид.

На доказательстве этого предложения мы в настоящей статье останавливаться не будем.

В заключение укажем еще, что представлялось бы интересным распространить этот метод построения поверхностей второго порядка на случай произвольного расположения направляющей плоскости  $\delta$  относительно точки  $F$  и прямой  $d$ . Что и в случае произвольного расположения плоскости  $\delta$  получится поверхность второго порядка, легко установить аналитическим путем. Однако исследование этого общего случая синтетическими методами связано со значительными трудностями<sup>1</sup>.

## ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА КОНЕЧНОГО ПРИРАЩЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. С. Кованько (Томск)

Нами была выведена формула конечного приращения (обобщение формулы Коши) для функции одной переменной (см. „Матем. сборн.“, т. XXXIII). Именно, для двух функций  $f(t)$  и  $\varphi(t)$  мы имеем:

$$\frac{\Delta_n f(a)}{\Delta_n \varphi(a)} = \frac{f^{(n)}(a + \theta n h)}{\varphi^{(n)}(a + \theta n h)} \quad (0 < \theta < 1) \quad (1)$$

( $\Delta_n$  означает разность  $n$ -го порядка от функций;  $h$  — разность аргумента).

<sup>1</sup> См. цитированную в начале статьи книгу Шретера.



Применим формулу (1) к следующим функциям  $f(t)$  и  $\varphi(t)$ . Пусть мы имеем две функции (многих) двух переменных:  $F(x, y)$  и  $\Phi(x, y)$ . Мы положим, что

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= F(x + t\Delta x, y + t\Delta y), \\ \varphi(t) &= \Phi(x + t\Delta x, y + t\Delta y), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta y$ —конечные приращения  $x$  и  $y$ . Полагая  $a = 0$  и  $h = 1$ , в формуле (1) можем написать:

$$\frac{\Delta_n f(0)}{\Delta_n \varphi(0)} = \frac{f^{(n)}(0)}{\varphi^{(n)}(0)}.$$

Но

$$\Delta_n f(0) = f(n) - S_{n,1} f(n-1) + S_{n,2} f(n-2) - S_{n,3} f(n-3) + \dots + (-1)^n f(0)$$

и

$$\Delta_n \varphi(0) = \varphi(n) - S_{n,1} \varphi(n-1) + S_{n,2} \varphi(n-2) - S_{n,3} \varphi(n-3) + \dots + (-1)^n \varphi(0),$$

где

$$S_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

Очевидно, что

$$f(k) = F(x + k\Delta x, y + k\Delta y); \quad \varphi(k) = \Phi(x + k\Delta x, y + k\Delta y).$$

Поэтому

$$\Delta_n f(0) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k S_{n,k} F[x + (n-k)\Delta x, y + (n-k)\Delta y];$$

$$\Delta_n \varphi(0) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k S_{n,k} \Phi[x + (n-k)\Delta x, y + (n-k)\Delta y];$$

$$f^{(n)}(t) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n \cdot F(x + t\Delta x, y + t\Delta y);$$

$$\varphi^{(n)}(t) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n \cdot \Phi(x + t\Delta x, y + t\Delta y)$$

(в символических обозначениях). Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k S_{n,k} F[x + (n-k)\Delta x, y + (n-k)\Delta y]}{\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k S_{n,k} \Phi[x + (n-k)\Delta x, y + (n-k)\Delta y]} = \\ &= \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n \cdot F(x + \vartheta n \Delta x, y + \vartheta n \Delta y)}{\left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n \cdot \Phi(x + \vartheta n \Delta x, y + \vartheta n \Delta y)}, \end{aligned}$$

где  $(0 < \vartheta < 1)$ .

Это и есть искомая формула.  
Рассмотрим ее частные случаи:

1)  $n = 1$ ; тогда получим:

$$\begin{aligned} & \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \Phi(x, y)} = \\ & = \frac{\frac{\partial F(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{\partial y} \Delta y}{\frac{\partial \Phi(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Phi(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{\partial y} \Delta y}. \end{aligned}$$

2)  $n = 2$ ; тогда получим:

$$\begin{aligned} & \frac{F(x + 2\Delta x, y + 2\Delta y) - 2F(x + \Delta x, y + \Delta y) + F(x, y)}{\Phi(x + 2\Delta x, y + 2\Delta y) - 2\Phi(x + \Delta x, y + \Delta y) + \Phi(x, y)} = \\ & = \frac{\frac{\partial^2 F(x + 2\theta \Delta x, y + 2\theta \Delta y)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 F(x + 2\theta \Delta x, y + 2\theta \Delta y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 F(x + 2\theta \Delta x, y + 2\theta \Delta y)}{\partial y^2} \Delta y^2}{\frac{\partial^2 \Phi(x + 2\theta \Delta x, y + 2\theta \Delta y)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi(x + 2\theta \Delta x, y + 2\theta \Delta y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 \Phi(x + 2\theta \Delta x, y + 2\theta \Delta y)}{\partial y^2} \Delta y^2}. \end{aligned}$$

В частности, при  $\Phi(x, y) = (x + y)^2$  мы эту формулу перепишем так:

$$\begin{aligned} & F(x + 2\Delta x, y + 2\Delta y) - 2F(x + \Delta x, y + \Delta y) + F(x, y) = \\ & = \frac{\partial^2 F(x + 2\theta \Delta x, y + 2\theta \Delta y)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 F(x + 2\theta \Delta x, y + 2\theta \Delta y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \\ & + \frac{\partial^2 F(x + 2\theta \Delta x, y + 2\theta \Delta y)}{\partial y^2} \Delta y^2. \end{aligned}$$

## БЕСКОНЕЧНЫЕ СВЕРХСТЕПЕНИ

П. И. Романовский (Москва)

Действие сложения порождает понятие о ряде

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Действие умножения порождает понятие о бесконечном произведении

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

Аналогично, действие возведения в степень может породить понятия о двух новых процессах:

$$\left( (a_1 a_2)^{a_3 \dots} \right)^{a_n \dots} \quad \begin{matrix} : \\ a_n \\ : \\ a_2 \\ a_1 \end{matrix}$$

Первый из них интереса не представляет, так как его изучение непосредственно сводится к изучению бесконечного произведения  $a_2 a_3 a_4 \dots$ . Мы остановимся в настоящей статье на втором процессе. Во избежание многозначностей мы везде в дальнейшем будем считать все  $a_n$  положительными и рассматривать лишь арифметические значения степеней. Выражение

$$\begin{array}{c} \vdots \\ a_n \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{array}$$

будем именовать бесконечной сверхстепенью.

§ 1. Определение. Бесконечная сверхстепень  $a_1^{\vdots a_2}$  называется сходящейся, если последовательность чисел

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & a_4 & & \\ & & & a_3 & a_3 & & \\ & a_2 & & a_2 & a_2 & & \\ a_1, a_1, & a_1, & a_1, & a_1, & \dots \end{array}$$

сходится, причем предел этой последовательности называется значением рассматриваемой бесконечной сверхстепени. В противном случае бесконечная сверхстепень называется расходящейся.

Таким образом в случае сходимости имеем:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ a_n \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \end{array}$$

Отметим некоторые очевидные свойства. Если  $a_N^{\vdots a_{N+1}}$  сходится,

то  $a_1^{\vdots a_2}$  тоже сходится, причем  $a_1^{\vdots a_2} = a_1^A$ , где  $A = a_N^{\vdots a_{N+1}}$ . Если

некоторое  $a_N = 1$ , то  $a_1^{\vdots a_2}$  сходится, причем  $a_1^{\vdots a_2} = a_1$ .

Заметим еще, что в случае  $a_n > 1$  для всех значений  $n$  схо-

димость  $a_1^{\vdots a_2}$  равносильна ограниченности чисел  $a_1, a_1, a_1, \dots$ ,

а расходямость  $a_1^{a_2^{a_3^{\vdots}}}$  равносильна неограниченному возрастанию чисел  $a_1, a_1^{a_2}, a_1^{a_2^{a_3}}, \dots$ .

§ 2. Теорема 1. Если  $1 < a_n \leq \sqrt[n]{e}$ , то бесконечная сверх-  
 $a_2^{a_3^{\vdots}}$   
 степенъ  $a_1^{a_2^{a_3^{\vdots}}}$  сходится; если же  $a_n > \sqrt[n]{e} + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$ —произвольно малое положительное число, то упомянутая бесконечная сверх-  
 степенъ расходится.

Доказательство. Имеем в случае  $1 < a_n \leq \sqrt[n]{e}$ :

$$\begin{aligned} a_1^{a_2^{a_3^{\vdots}}} &\leq \underbrace{\sqrt[n]{e}}_{n \text{ раз}} < \underbrace{\sqrt[n]{e}}_{n \text{ раз}}^e = \\ &= \underbrace{\sqrt[n-1]{e}}_{n-1 \text{ раз}} = \dots = \sqrt[n]{e}^e = \sqrt[n]{e} = e. \end{aligned}$$

Следовательно,  $a_1^{a_2^{a_3^{\vdots}}}$  сходится к числу, не превышающему  $e$ .

Покажем, далее, что при  $a > \sqrt[n]{e}$  бесконечная сверх-

$a^{a^{a^{\vdots}}}$   
 степенъ  $a^{a^{a^{\vdots}}}$  расходится. Если бы она сходилась, то ее значение  $A$  удовлетворяло бы уравнению  $a^x = x$ , так как, полагая

$$A_n = \underbrace{a^{a^{a^{\vdots}}}}_{n \text{ раз}},$$

получим  $a^{A_{n-1}} = A_n$ , откуда в пределе  $a^A = A$ .

Поэтому наше утверждение будет доказано, если выяснится, что уравнение  $a^x = x$  не имеет решений. Пусть  $f(x) = a^x - x$ , тогда  $f'(x) = a^x \ln a - 1$  возрастает, проходя через нуль при  $a^x = \frac{1}{\ln a}$ , т. е. при  $x = -\frac{\ln \ln a}{\ln a}$ . Следовательно, наименьшее значение  $f(x)$  будет

$$f\left(-\frac{\ln \ln a}{\ln a}\right) = \frac{1 + \ln \ln a}{\ln a} > \frac{1 + \ln \ln \sqrt[e]{e}}{\ln a} = 0.$$

Значит,  $f(x) > 0$  всюду, и уравнение  $a^x = x$  решений не имеет.

Пусть теперь  $a_n > \sqrt[e]{e} + \varepsilon$ . Тогда

$$\begin{array}{c} a_n \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{array} > \underbrace{\sqrt[e]{e} + \varepsilon}_{n \text{ раз}},$$

где правая часть на основании только что доказанного неограниченно возрастает при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно,  $a_1^{a_2}$  расходится.

Примечание. Можно даже подобрать  $a_n > \sqrt[e]{e}$  и стремящиеся к

$\sqrt[e]{e}$  так, что  $a_1^{a_2}$  расходится. В самом деле, пусть  $\lambda_n$  — числа, стремящиеся к  $+\infty$ , и  $A_n$  — числа большие  $\sqrt[e]{e}$  и стремящиеся к  $\sqrt[e]{e}$ . Берем  $n_1$  настолько

большим, чтобы  $\underbrace{A_1}_{n_1 \text{ раз}} > \lambda_1$  (что возможно вследствие расходимости сверхсте-

пени  $A_1$ ),

затем  $n_2$  настолько большим, чтобы  $\underbrace{A_1}_{n_1 \text{ раз}}^{A_2} > \lambda_2$  (что возможно вслед-

ствие расходимости  $\underbrace{A_1}_{n_1 \text{ раз}}^{A_2}$ ) и т. д.

В результате получим искомую расходящуюся сверхстепень:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A_2 \\ \vdots \\ \underbrace{A_2}_{n_1 \text{ раз}} \\ A_1 \\ \vdots \\ \underbrace{A_1}_{n_1 \text{ раз}} \end{array} .$$

§ 3. Теорема II. Если  $\frac{1}{e} + \varepsilon < a_n < 1$ , где  $\varepsilon$  — произвольно

малое положительное число, то бесконечная сверхстепень  $a_1^{\vdots}$  сходится.

*Доказательство.* Пусть  $f(x) = a_1^{\vdots a_2^{\vdots a_3^{\vdots \dots a_n^x}}}$ , тогда

$$f'(x) = a_1^{\vdots a_2^{\vdots a_3^{\vdots \dots a_n^x}} \ln a_1 a_2^{\vdots a_3^{\vdots \dots a_n^x}} \ln a_2 \dots a_{n-1}^{\vdots a_n^x} \ln a_{n-1} a_n^x \ln a_n,$$

откуда при  $x > 0$

$$|f'(x)| < |\ln a_1| |\ln a_2| \dots |\ln a_n| < \left| \ln \left( \frac{1}{e} + \varepsilon \right) \right|^n,$$

так как все  $|\ln a_n| < \left| \ln \left( \frac{1}{e} + \varepsilon \right) \right|$  в силу  $\ln \left( \frac{1}{e} + \varepsilon \right) < \ln a_n < 0$ .

Теперь по формуле Лагранжа имеем:

$$a_1^{\vdots a_2^{\vdots a_3^{\vdots \dots a_{n+1}}} - a_1^{\vdots a_2^{\vdots a_3^{\vdots \dots a_n}}} = f(a_{n+1}) - f(1) = f'(\xi)(a_{n+1} - 1),$$

где  $\xi > 0$ .

Следовательно:

$$|a_1^{\vdots a_2^{\vdots a_3^{\vdots \dots a_{n+1}}} - a_1^{\vdots a_2^{\vdots a_3^{\vdots \dots a_n}}}| < \left| \ln \left( \frac{1}{e} + \varepsilon \right) \right|^n,$$

что и доказывает сходимость  $a_1^{\vdots a_2^{\vdots a_3^{\vdots \dots a_n^{\vdots}}}}$ , так как  $\left| \ln \left( \frac{1}{e} + \varepsilon \right) \right| < 1$ .

Этим еще показано, что сходимость рассматриваемой бесконечной сверхстепени не хуже сходимости убывающей геометрической прогрессии.

**Примечание.** Эту теорему можно несколько обобщить, формулировав ее так <sup>1</sup>: если  $0 < a_n < 1$  и  $\underline{\lim} a_n > \frac{1}{e}$ , то бесконечная сверх-

степень  $\begin{matrix} \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{matrix}$  сходится. В самом деле, из  $\underline{\lim} a_n > \frac{1}{e}$  следует, что найдутся такие  $N$  и  $\epsilon > 0$ , что при  $n \geq N$  имеем  $a_n > \frac{1}{e} + \epsilon$ , но тогда по дока-

занному  $\begin{matrix} \vdots \\ a_{N+2} \\ a_{N+1} \end{matrix}$  сходится, следовательно, сходится и  $\begin{matrix} \vdots \\ a_3 \\ a_2 \end{matrix}$  и  $a_1$ .

**§ 4. Теорема III.** Если  $0 < a_n < 1$ , то обе последовательности

$$\begin{matrix} & & a_5 & & & & a_6 & \\ & & a_4 & & & & a_5 & \\ & a_3 & a_3 & & a_4 & & a_4 & \\ a_2 & a_2 & a_2 & & a_2 & & a_2 & \\ a_1, & a_1, & a_1, & \dots & a_1, & a_1, & a_1, & \dots \end{matrix}$$

сходятся, причем первая возрастает, вторая убывает, и каждый член первой меньше каждого члена второй. Пределы этих последовательностей  $m$  и  $M$ , очевидно, удовлетворяют неравенству  $m \leq M$ , причем бывает возможен как знак  $=$ , так и знак  $<$ .

**Доказательство.** Из  $0 < a_n < 1$  следует, что функции  $a_1^x$  убывающая,  $a_1^x$  — возрастающая,  $a_1^x$  — убывающая,  $a_1^x$  — воз-

растающая и т. д. Отсюда вследствие  $a_{n+1} < 1$  получается:

$$\begin{matrix} & & a_{n+k} & \\ & & \vdots & \\ & a_{n+k} & & \\ & \vdots & & \\ a_n & a_{n+1} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1 & & & a_1 \end{matrix} < a_1$$

<sup>1</sup> Знак  $\underline{\lim} a_n$  обозначает нижний предел последовательности  $a_n$ , т. е. верхнюю грань тех чисел, которые, начиная с некоторого места, меньше членов последовательности  $a_n$ .

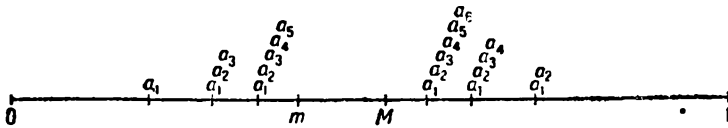
при  $n$  нечетном,

$$\begin{array}{c} a_{n+k} \\ \vdots \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \\ a_1 \end{array} > a_1$$

при  $n$  четном, что и доказывает теорему.

$$\begin{array}{c} a_3 \\ a_2 \end{array}$$

Расположение чисел  $a_1, a_1, a_1, \dots$  на числовой шкале напоминает расположение последовательных сумм знакопередающегося



Фиг. 1.

ряда с членами, убывающими по абсолютной величине (фиг. 1).

В случае  $t = M$  бесконечная сверхстепень  $a_1$  будет сходящейся, в случае  $t < M$  она будет расходящейся.

Случай  $t = M$  представляется, например, при  $\frac{1}{e} + \varepsilon < a_n < 1$  (см. теорему II). Случай  $t < M$  (даже с  $M - t$ , как угодно близким к единице) может быть получен следующим образом.

Берем  $a_1 < \varepsilon$ , затем  $a_2$  настолько малым, чтобы было  $a_1^{a_2} > 1 - \varepsilon$  (это возможно, так как  $a_1^{a_2} \rightarrow 1$  при  $a_2 \rightarrow 0$ ), затем  $a_3$  настолько

малым, чтобы было  $a_1^{a_2^{a_3}} < \varepsilon$  (это возможно, так как  $a_1^{a_2^{a_3}} \rightarrow a_1 < \varepsilon$

при  $a_3 \rightarrow 0$ ), затем  $a_4$  настолько малым, чтобы было  $a_1^{a_2^{a_3^{a_4}}} > 1 - \varepsilon$

(это возможно, так как  $a_1^{a_2^{a_3^{a_4}}} \rightarrow a_1^{a_2^{a_3}} > 1 - \varepsilon$  при  $a_4 \rightarrow 0$ ) и т. д.

Для построенного примера очевидно  $t \leq \varepsilon$ ,  $M \geq 1 - \varepsilon$ . Мы видим, таким образом, что среди бесконечных сверхстепе-

ней  $a_1$ , где  $0 < a_n < 1$ , имеются как сходящиеся, так и расходящиеся.

Для доказательства сходимости какой-нибудь бесконечной

сверхстепени  $a_1$ , где  $0 < a_n < 1$ , достаточно показать, что для



всякого  $\varepsilon > 0$  найдется хотя бы одно  $n$  такое, что

$$\left| \begin{array}{ccc} & a_{n+1} & \\ a_n & & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_2 & & a_2 \\ a_1 & - a_1 & \end{array} \right| < \varepsilon,$$

так как тогда тем более  $M - m < \varepsilon$ , и вследствие произвола  $\varepsilon$  неизбежно  $m = M$ .

§ 5. Из теоремы II (см. примечание к ней) вытекало, что если нижний предел чисел  $a_n$ , лежащих между нулем и единицей,

больше  $\frac{1}{e}$ , то бесконечная сверхстепень  $a_1$  сходится. Мы хотим теперь обобщить этот результат и показать, что вместо предположения о нижнем пределе чисел  $a_n$  достаточно сделать такое предположение лишь о среднем геометрическом чисел  $a_1 \dots a_n$ .

Лемма I. При  $0 < t < 1$  и при  $a > 0$  имеем  $t^a |\ln t| \leq \frac{1}{ea}$ .

Доказательство. Полагая  $f(t) = t^a \ln t$ , получим:

$$f'(t) = t^{a-1}(a \ln t + 1),$$

где множитель перед скобкой положителен, а выражение, стоящее в скобках, возрастает, проходя через нуль при  $t = e^{-\frac{1}{a}}$ ; следовательно, наименьшее значение  $f(t)$  будет  $f(e^{-\frac{1}{a}}) = -\frac{1}{ea}$ , но при  $0 < t < 1$   $f(t) < 0$ , поэтому при  $0 < t < 1$   $|f(t)| \leq \frac{1}{ea}$ , что и доказывает лемму.

Теорема IV. Если  $0 < a_n < 1$  и  $\lim_n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} > \frac{1}{e}$ , то

бесконечная сверхстепень  $a_1$  сходится.

Доказательство. Сперва заметим, что найдутся как угодно большие номера  $n$ , для которых  $a_n > \frac{1}{e}$ , так как если бы с некоторого номера  $N$  все  $a_n$  были меньше или равны  $\frac{1}{e}$ , то

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = (a_1 \dots a_N)^{\frac{1}{n}} (a_{N+1} \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq (a_1 \dots a_N)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-N}{n}},$$

где правая часть стремится к  $\frac{1}{e}$  при  $n \rightarrow \infty$ , и поэтому нижний

предел левой части должен быть меньше или равен  $\frac{1}{e}$ , что противоречит условию.

Положив теперь  $f(x) = a_1^{a_2^{\vdots^{a_n^x}}}$ , найдем

$$f'(x) = a_1^{a_2^{\vdots^{a_n^x}}} \ln a_1 a_2^{a_3^{\vdots^{a_n^x}}} \ln a_2 \dots a_{n-1}^{a_n^x} \ln a_{n-1} a_n^x \ln a_n.$$

Замечая, что для любых чисел  $a, b, c$ , лежащих между нулем

и единицей, всегда  $a < \frac{b}{c} a$ , найдем при  $0 < x < 1$

$$|f'(x)| < a_1^{a_2} |\ln a_1| a_2^{a_3} |\ln a_2| \dots a_{n-1}^{a_n} |\ln a_{n-1}| a_n^x |\ln a_n|.$$

Следовательно, на основании леммы

$$|f'(x)| < \frac{1}{e a_2} \cdot \frac{1}{e a_3} \dots \frac{1}{e a_n} \cdot \frac{1}{e x}.$$

Формула Лагранжа дает

$$a_1^{a_2^{\vdots^{a_{n+1}}}} - a_1^{a_2^{\vdots^{a_n}}} = f(a_{n+1}) - f(1) = f'(\xi)(a_{n+1} - 1), \text{ где } a_{n+1} < \xi < 1, \\ \text{следовательно,}$$

$$|a_1^{a_2^{\vdots^{a_{n+1}}}} - a_1^{a_2^{\vdots^{a_n}}}| < \frac{1}{e^n a_2 a_3 \dots a_n \xi}.$$

Из  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} > \frac{1}{e}$  следует, что найдутся такие  $N$  и  $\varepsilon > 0$ ,

что при  $n \geq N$  будет  $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} > \frac{1}{e} + \varepsilon$ . Беря лишь те  $n > N$ ,

для которых  $a_{n+1} > \frac{1}{e}$  (следовательно,  $\xi > \frac{1}{e}$ ), а таких  $n$  беско-

нечное множество (как было замечено в начале доказательства), получим

$$\begin{array}{ccc} & a_{n+1} & \\ & a_n & a_n \\ & \vdots & \vdots \\ a_2 & & a_2 \\ & & \vdots \end{array} \quad |a_1 - a_1| < \frac{a_1}{e^n \left( \frac{1}{e} + \varepsilon \right)^n \frac{1}{e}} = \frac{a_1 e}{(1 + \varepsilon e)^n},$$

но последнее выражение как угодно мало, если  $n$  достаточно велико. Теорема доказана (если принять во внимание замечание, сделанное в конце § 4).

§ 6. Изучим детальнее случай  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots$ , т. е. изучим

свойства бесконечных сверхстепеней вида  $\overset{a}{\underset{a}{\overset{a}{\ddots}}}$ , где  $a > 0$ .

Из теорем I и II непосредственно вытекает.

Следствие. При  $\frac{1}{e} < a \leq \sqrt[e]{e}$  бесконечная сверхсте-

$\overset{a}{\underset{a}{\overset{a}{\ddots}}}$ пень  $a$  сходится; при  $a > \sqrt[e]{e}$  она расходится.

Остается изучить случай  $0 < a \leq \frac{1}{e}$ .

Лемма II. Пусть  $0 < a < 1$ . Тогда пределы  $m$  и  $M$  обеих последовательностей

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & a & \\ & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{array}$$

$a, a, a, \dots$  и  $a, a, a, \dots$

являются корнями уравнения  $\overset{x}{\underset{a}{\overset{a}{\ddots}}} = x$ .

Доказательство. Полагая  $\overset{a}{\underset{a}{\overset{a}{\ddots}}} = A_n$ , получим:

$$\overset{a}{\underset{a}{\overset{a}{\ddots}}} = A_n, \quad \overset{a}{\underset{a}{\overset{a}{\ddots}}} = A_{n-2}, \quad \overset{a}{\underset{a}{\overset{a}{\ddots}}} = A_n.$$

Но при нечетном  $n \rightarrow \infty$ , очевидно,  $A_n$  и  $A_{n-2} \rightarrow m$ , следовательно, в пределе  $a = m$  и аналогично при четном  $n \rightarrow \infty$  имеем  $A_n$  и

$A_{n-2} \rightarrow M$ , поэтому в пределе  $a^{\frac{M}{a}} = M$ .

Лемма доказана.

Теперь мы легко можем понизить фигурирующую в следствии левую границу  $\frac{1}{e}$ .

Теорема V. При  $\frac{1}{e^e} \leq a < 1$  бесконечная сверхстепень  $a$  сходится.

Доказательство. Для доказательства сходимости достаточно показать, что  $m = M$ . Так как  $m$  и  $M$  являются согласно лемме II

корнями уравнения  $a^x = x$ , то все будет сделано, если будет показана единственность решения уравнения  $a^x = x$ .

Пусть  $f(x) = a^x - x$ ; тогда

$$f'(x) = a^x (\ln a) - 1;$$

$$f''(x) = a^x (\ln a)^2 \left( a^x + \frac{1}{\ln a} \right).$$

Множитель перед скобкой в выражении второй производной всюду положителен, а выражение в скобках убывает, проходя через нуль при

$$a^x = \frac{1}{\ln a},$$

т. е. при

$$x = \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}};$$

следовательно, наибольшее значение  $f'(x)$  есть

$$\begin{aligned} f' \left( \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}} \right) &= a^{\frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}}} \cdot \frac{1}{\ln \frac{1}{a}} (\ln a)^2 - 1 = \\ &= \frac{1}{e} \ln \frac{1}{a} - 1 \leq \frac{1}{e} \ln e^e - 1 = 0, \end{aligned}$$

откуда  $f'(x) \leq 0$  всюду (причем равенство имеет место не больше, чем в одной точке), поэтому  $f(x)$  — всюду убывающая функция, и уравнение  $f(x) = 0$  не может иметь более одного решения. Теорема доказана.

§ 7. Теперь мы покажем, что полученная в предыдущей теореме левая граница  $\frac{1}{e^e}$  оказывается уже точной и не может быть понижена дальше.

Лемма III. Пусть  $0 < a < 1$ . Тогда пределы  $m$  и  $M$  последовательностей

$$a, \overset{a}{\underset{a}{a}}, \overset{a}{\underset{a}{\underset{a}{a}}}, \dots \quad \text{и} \quad a, \overset{a}{\underset{a}{a}}, \overset{a}{\underset{a}{\underset{a}{a}}}, \dots$$

связаны соотношением  $m = a^M$  и  $M$  является наибольшим корнем

уравнения  $\overset{x}{\underset{a}{a}} = x$ .

Доказательство. Прежде всего ясно, что всякий корень уравнения  $\overset{x}{\underset{a}{a}} = x$  удовлетворяет неравенствам  $0 < x < 1$ . Пусть  $x$  — любой из этих корней. Тогда при  $n$  четном

$$\underbrace{\overset{a}{\underset{a}{a}}}_{n \text{ раз}} > \underbrace{\overset{x}{\underset{a}{a}}}_{n \text{ раз}} = \underbrace{\overset{x}{\underset{a}{a}}}_{n-2 \text{ раз}} = \dots = \overset{x}{\underset{a}{a}} = x,$$

откуда в пределе при  $n \rightarrow \infty$  получим  $M \geq x$ ; но  $M$  на основании леммы II тоже является корнем рассматриваемого уравнения, значит  $M$  есть наибольший корень этого уравнения.

Положив теперь  $\underbrace{\overset{a}{\underset{a}{a}}}_{n \text{ раз}} = A_n$ , получим  $a^{A_{n-1}} = A_n$ ; но при нечетном

$n \rightarrow \infty$ , очевидно,  $A_n \rightarrow m$ ,  $A_{n-1} \rightarrow M$ , следовательно, в пределе  $a^M = m$ , и лемма, таким образом, доказана.

Теорема VI. При  $0 < a < \frac{1}{e^e}$  бесконечная сверхстепень  $\overset{\vdots}{\underset{a}{a}}$  расходится.

Доказательство. Пусть  $f(x) = a^{\frac{x}{a}} - x$ . Имеем:

$$f\left(\frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}}\right) = a^{\frac{1}{\ln \frac{1}{a}}} - \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}} = \frac{1}{e} - \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}} \geq 0,$$

так как  $\frac{1}{e} = \max_t \frac{\ln t}{t}$ . Но  $f(1) = a - 1 < 0$ , следовательно, урав-

нение  $f(x) = 0$  обязательно имеет корень, больший или равный  $\frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}}$ ,

поэтому в силу леммы III имеем  $M \geq \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}}$ . Имея в виду эту же

лемму и замечая, что по условию  $\ln \ln \frac{1}{a} > \ln \ln e^e = 1$ , получим:

$$m = a^M \leq a^{\frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}}} = \frac{1}{\ln \frac{1}{a}} < \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}} \leq M,$$

т. е.  $m < M$ , что доказывает расходимость сверхстепени  $a$ .

§ 8. Изучим детальнее уравнение  $a^{\frac{x}{a}} = x$  при  $0 < a < 1$ . В начале доказательства теоремы V мы видели, что вторая производ-

ная от  $a^{\frac{x}{a}} - x$  обращается в нуль не более одного раза, по-

этому вследствие теоремы Ролля  $a^{\frac{x}{a}} - x$  может обратиться в нуль

не более трех раз, т. е. уравнение  $a^{\frac{x}{a}} = x$  имеет не более трех корней. В числе этих корней всегда будет единственный корень  $\mu$  уравнения  $a^x = x$ . При  $a \geq \frac{1}{e^e}$  он будет и единственным корнем

уравнения  $a^{\frac{x}{a}} = x$ , но при  $a < \frac{1}{e^e}$  картина меняется; тогда урав-

нение  $a^x = x$  имеет ровно три различных корня  $m, \mu, M$ , удовлетворяющих неравенствам  $m < \mu < M$ . В самом деле, если бы  $\mu = M$ , то имели бы  $m = a^M = \mu = a^\mu = M$ , что противоречит  $m < M$ , поэтому  $\mu < M$ , но тогда  $m = a^M < a^\mu = \mu$ , т. е.  $m < \mu$ . При стремлении  $a$  к нулю  $M \rightarrow 1$ ,  $\mu \rightarrow 0$ , и, следовательно,  $m \rightarrow 0$ . В самом деле,

полагая  $f(x) = a^x - x$ , получим  $f(1-\varepsilon) = a^{1-\varepsilon} - (1-\varepsilon) \rightarrow \varepsilon$  при  $a \rightarrow 0$ , поэтому при достаточно малых  $a$ ,  $f(1-\varepsilon) > 0$ , но  $f(1) = a - 1 < 0$ , значит при достаточно малых  $a$   $M > 1 - \varepsilon$ , следовательно,  $M \rightarrow 1$  при  $a \rightarrow 0$ . Далее, полагая  $\varphi(x) = a^x - x$ , получим  $\varphi(\varepsilon) = a^\varepsilon - \varepsilon \rightarrow -\varepsilon$  при  $a \rightarrow 0$ , поэтому при достаточно малых  $a$   $\varphi(\varepsilon) < 0$ , но  $\varphi(0) = 1 > 0$ , значит, при достаточно малых  $a$  будет  $\mu < \varepsilon$ , следовательно,  $\mu \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow 0$ .

Приведем еще небольшую численную иллюстрацию. Покажем, что при  $a \leq \frac{1}{16}$  будет  $m \leq \frac{1}{4}$ ,  $M \geq \frac{1}{2}$ . В самом деле, при

$a \leq \frac{1}{16}$  имеем:  $f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0$ , так как  $t^{\frac{1}{2}} -$  убывающая функция при  $0 < t < \frac{1}{e^2}$ , откуда заключаем, что  $M \geq \frac{1}{2}$ , но тогда  $m = a^M \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ .

§ 9. Изучив полностью вопрос о сходимости и расходимости

бесконечной сверхстепени  $a$ , поставим вопрос об ее величине

в случае сходимости. Очевидно, что в случае сходимости  $a$

должна быть корнем уравнения  $a^x = x$ . Это уравнение имеет единственный корень при  $0 < a \leq 1$ , имеет ровно два корня при

$1 < a < \sqrt[e]{e}$ , имеет единственный корень при  $a = \sqrt[e]{e}$  и не

имеет совсем корней при  $a > \sqrt[e]{e}$ . В самом деле, уравнение  $a^x = x$

равносильно  $\sqrt[x]{x} = a$ , но  $\sqrt[x]{x}$  возрастает от нуля до  $\sqrt[e]{e}$ , когда

$x$  изменяется от нуля до  $e$ , и убывает от  $\sqrt[e]{e}$  до единицы, когда

$x$  изменяется от  $e$  до  $+\infty$ . В случае двойственности корня больший

превышает  $e$  и, следовательно, не может быть значением  $a$

(см. неравенство в начале доказательства теоремы). Таким образом приходим к следующему заключению:

:  
 $a$

Бесконечная сверхстепень  $a$ , где  $a > 0$ , сходится при  $e^{-e} \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$  и расходится при  $a > e^{\frac{1}{e}}$  и при  $a < e^{-e}$ . В случае сходимости ее значение есть наименьший корень уравнения  $a = x$ .

:  
 $a$

Интересно отметить, что, с одной стороны,  $a$  может расходиться, когда уравнение  $a = x$  имеет единственный корень ( $a < \frac{1}{e^e}$ ), с другой стороны,  $a$  может сходиться, когда уравнение  $a = x$  имеет больше одного корня ( $1 < a < \sqrt[e]{e}$ ). Из сказанного выше непосредственно следует, что при  $\frac{1}{e} \leq a \leq e$  имеем:

$$\sqrt[a]{\sqrt[a]{a}} = a.$$

Например

$$\sqrt[2]{\sqrt[2]{2}} = 2.$$

Отметим еще любопытную характеристику основания натуральных логарифмов. Число  $e$  есть наибольшее возможное значение

:  
 $a$

сходящейся сверхстепени вида  $a$ , где  $a > 0$ .

## ПОСТРОЕНИЯ, ВЫПОЛНЯЕМЫЕ ОДНОСТОРОННЕЙ ЛИНЕЙКОЙ, ЕСЛИ ЗАДАНА ДУГА КОНИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ, ЦЕНТР И ФОКУС КОТОРОГО ИЗВЕСТНЫ

Н. В. Наумович (Ростов-на-Дону)

§ 1. В древности единственными чертежными инструментами служили циркуль и линейка. Другие приборы, как, например, угольник, двубортная линейка и др., стали вводиться в употребление сравнительно недавно.



Известны тщетные попытки древних решить знаменитые задачи трисекции угла, квадратуры круга и удвоения куба с помощью циркуля и линейки. Только в прошлом столетии было доказано, что причина неудачи крылась в том, что указанные проблемы сводятся к решению уравнений выше второй степени или трансцендентных, а циркулем и линейкой могут быть решены только те задачи, которые приводят к решению уравнений не выше второй степени.

В 1797 г. вышло сочинение Маскерони „La Geometria del Compasso“, в котором автор доказал, что все геометрические построения, выполнявшиеся ранее циркулем и линейкой, могут быть также проделаны только одним циркулем. Таким образом циркуль является значительно более мощным инструментом, чем линейка.

Вскоре после этого французские геометры стали заниматься решением задач на построение, проводя лишь одни прямые линии. Подобными построениями интересовались уже Ламберт и Брианшон, опубликовавший в 1818 г. сочинение, касающееся построений этого рода. Наибольшую известность завоевало классическое произведение Якоба Штейнера „Die geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises“, вышедшее в 1833 г. В нем Штейнер показывает, какие задачи на построение, производимые циркулем и линейкой, могут быть выполнены одной линейкой, если в плоскости даны изображения некоторых фигур, например параллелограмма, квадрата, круга. Самой замечательной является следующая его теорема, которой присвоено его имя: „При пользовании произвольно начерченным кругом (вместе с его центром) каждую задачу на построение второй степени можно решить, проводя лишь одни прямые линии“.

Таким образом средства высшего порядка, необходимые для решения задач второй степени, он сводит к минимуму, пользуясь циркулем только один раз для вычерчивания полной окружности.

В начале текущего столетия вновь вспыхнул интерес к построениям, выполняемым проведением прямых линий при наличии некоторых начерченных объектов. Ф. Севери (F. Severi)<sup>1)</sup> и проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской<sup>2)</sup> значительно сузили средства высшего порядка, необходимые для решения задач второй степени. Весьма оригинальным способом и независимо друг от друга ими было показано, что все конструктивные задачи второй степени могут быть решены проведением только прямых линий, если в плоскости чертежа начерчена дуга какой-либо окружности и указано положение ее центра.

Результат работ проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского и Ф. Севери могут быть обобщены на случай произвольной дуги

<sup>1)</sup> F. Severi, Sui problemi risolubili colla riga e col compasso. Rendiconti de Circolo di Palermo del 1904.

<sup>2)</sup> D. Mordoukhay-Boltovskoy, Sur les constructions ou moyen de la règle et d'un arc de cercle fixe dont le centre est connu. Periodico di Matematiche, Marzo 1934, серия IV, т. XIV, п. 2.

любого конического сечения с заданным центром и одним из фокусов (для параболы, как кривой нецентральной, следует взять фокус и вершину).

Разбор построений, выполняемых проведением только прямых линий, при условии пользования произвольной сколь угодно малой дугой какого-либо конического сечения вместе с его центром и одним из фокусов (для дуги параболы — вершина и фокус) и есть цель настоящей статьи.

Каждая задача второй степени может быть решена, если мы умеем выполнять следующие элементарные построения:

- а) Проведение параллельных прямых;
- б) Проведение перпендикулярных прямых;
- в) Деление произвольного угла пополам;
- г) Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

В дальнейшем нам придется ссылаться на следующие построения, выполняемые проведением одних прямых линий, которые мы будем считать известными читателю:

1. Если дан отрезок и указана его середина, то через любую точку плоскости можно провести прямую, параллельную прямой, на которой расположен данный отрезок.

Если дан параллелограм, то возможны:

2. Проведение в любом направлении параллельных прямых.
3. Деление любого отрезка на  $n$  равных частей.

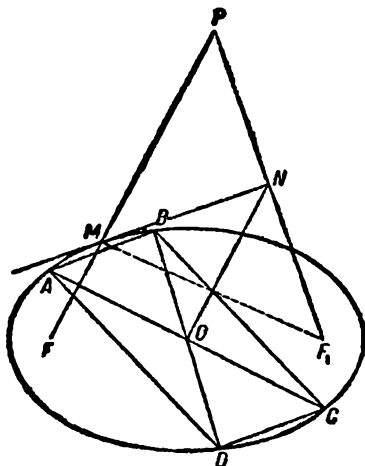
4. Откладывание данного отрезка от любой точки на прямой, на которой расположен данный отрезок, или на прямой, ей параллельной.

Далее, проведением прямых линий можно выполнить:

5. Построение бесконечного множества точек конического сечения, пять точек которого известны (шестиугольник Паскаля).

6. Построение касательной в данной точке конического сечения, пять точек которого известны.

§ 2. Рассмотрим сперва построения при помощи односторонней линейки, если дана произвольная сколь угодно малая дуга эллипса (или гиперболы), если известно также положение центра и одного из фокусов. Построение при наличии дуги параболы придется разобрать отдельно, так как парабола центра не имеет и для успешного решения задачи необходимо взять фокус и вершину. Итак, пусть  $AB$  — дуга эллипса (фиг. 1), центр которого находится в  $O$  и фокус в  $F$ . Проведем диаметры  $BO$  и  $AO$ . Точки  $D$  и  $C$  пересечения их с эллипсом определяются по теореме



**Фиг. 1.**



этих прямых с эллипсом. Строим в них касательные к эллипсу [§ 1 (6)], пересекающиеся в точке  $P$ . Тогда  $FP$  будет биссектрисой угла  $MFN$ , так как по известному свойству эллипса прямая, соединяющая точку пересечения двух касательных к нему с одним из фокусов, делит пополам угол между радиусами-векторами, проведенными из данного фокуса в точки касания. Прямая  $AD$ , параллельная  $FP$ , будет искомой биссектрисой угла  $BAC$ . Следовательно, для решения задачи (в) надо уметь находить точки пересечения с эллипсом любой прямой, проходящей через фокус.

Решение задачи (г) — построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету — может быть сведено, как известно, к нахождению двойных точек двух наложенных проективных пучков. Это же, как доказывается в курсах проективной геометрии, может быть выполнено в том случае, если мы умеем определять точки пересечения произвольной прямой с каким-либо коническим сечением. Если последнее вычерчено полностью, то точки пересечения находятся непосредственно, но так как по условию нам известна только произвольная сколь угодно малая дуга его, то мы должны указать прием, при помощи которого можно будет определить точки пересечения любой прямой с ним. Если это будет сделано, то нахождение точки пересечения с эллипсом прямой, проходящей через фокус, может рассматриваться как частный случай.

§ 3. Прежде чем перейти к решению указанной задачи, мы считаем необходимым остановиться несколько на построениях при наличии дуги параболы, так как в этом случае центр отсутствует и мы должны взять вместо фокуса и центра (эллипс, гипербола) фокус и вершину параболы. Отдельно касаться гиперболы мы не будем, так как все то, что было сказано относительно эллипса, может быть повторено совершенно так же и относительно гиперболы.

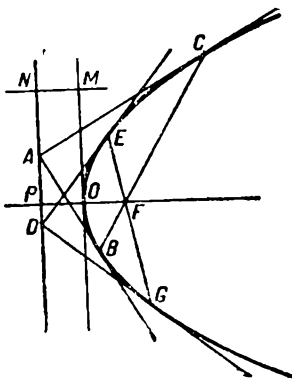
Итак, пусть дана некоторая дуга  $EC$  параболы (фиг. 4), фокус которой находится в  $F$  и вершина в  $O$ . Нам необходимо прежде всего найти директрису. Для построения ее вспомним, что она является полярной фокуса. Проведем прямые  $EF$  и  $CF$ . Точки пересечения их  $B$  и  $G$  с параболой определятся по теореме Паскаля [§ 1 (5)]. В точках  $E$  и  $G$  строим к параболе касательные [§ 1 (6)], и пусть  $D$  будет их точка пересечения. Таким же образом строим касательные в точках  $B$  и  $C$ , пересекающиеся в точке  $A$ . Тогда прямая  $AD$  будет директрисой.

Касательная в данной вершине  $O$  параболы будет параллельна директрисе, следовательно, у нас уже есть пара параллельных прямых. Проведем теперь ось  $OF$  параболы. Пусть она пересечет директрису в точке  $P$ . Как известно,

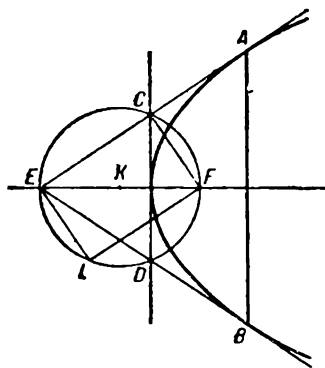
$$PO = OF,$$

и согласно § 1 (1) мы можем провести некоторую прямую  $MN$ , параллельную оси. Таким образом у нас имеется параллелограм, и, следовательно, решается задача (а) [§ 1 (2)].

Для проведения перпендикуляров [задача (б)] найдем пять точек и центр какой-либо окружности. Для этого через произвольную точку  $A$  (фиг. 5) данной дуги проведем прямую, параллельную касательной в вершине параболы. Точка  $B$  пересечения этой прямой с кривой может быть найдена по теореме Паскаля [§ 1 (5)]. В точках  $A$  и  $B$  строим касательные к параболы [§ 1 (6)]. Так как  $A$  и  $B$  симметричны относительно оси параболы, то касательные в них пересекутся в точке  $E$ , лежащей на ее оси. Пусть  $C$  и  $D$  — точки пересечения касательных в  $A$  и  $B$  с касательной в вершине. Так как „окружность, проходящая через точки пересечения трех касательных к параболы, проходит



Фиг. 4.



Фиг. 5.

через фокус ее\*, то точки  $E, C, F$  и  $D$  лежат на некоторой окружности. Нетрудно сообразить, что  $EF$  будет ее диаметр. Разделив  $EF$  пополам, найдем  $K$  — центр ее. Соединив  $E$  с  $C$  и  $C$  с  $F$ , получим прямой угол  $ECF$ . Если из  $E$  проведем прямую  $EL$ , параллельную  $CF$ , а из  $F$  — прямую  $FL$ , параллельную  $EC$ , то они пересекутся под прямым углом, и точка их пересечения  $L$  будет находиться на окружности. Таким образом найдем пять точек  $E, C, F, D, L$  некоторой окружности и  $K$  ее центр, а следовательно, разрешается задача (б).

Решение задач (в) (г) совершенно аналогично решению их в случае эллипса.

§ 4. Перейдем теперь к основной нашей задаче — нахождению точек пересечения произвольной прямой с коническим сечением, причем известны произвольная сколь угодно малая дуга его и указано положение центра и одного из фокусов (для параболы фокус и вершина). Нам придется воспользоваться результатами работ проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского, а потому не лишне будет напомнить, каким образом он находит точки пересечения произвольной прямой с окружностью, дуга и центр которой даны.

Пусть  $MN$  будет некоторая прямая и  $O$  центр окружности (фиг. 6), некоторая дуга которой известна (на чертеже не указана).

Опустим из  $O$  перпендикуляр  $OA$  на  $MN$ . Через  $A$  проведем произвольную прямую  $AB$ , на которую вновь опускаем перпендикуляр  $OD$ . Отрезок  $AD$  удваиваем; следовательно,  $DB = AD$ . Точку  $B$  соединяем с  $O$  и через  $B$  проводим прямую  $PQ$  перпендикулярно к  $OB$ . Если  $PQ$  пересечет данную дугу в некоторой точке  $P$ , то искомую точку пересечения прямой  $MN$  с окружностью можно найти следующим образом. Соединяем  $A$  с  $P$  и  $O$  с  $E$  (точка пересечения  $MN$  и  $PQ$ ). Прямые  $AP$  и  $OE$  пересекутся в какой-то точке  $C$ , которую соединяем с  $B$ . Точка  $N$  пересечения прямых  $BC$  и  $MN$  и будет искомой точкой пересечения данной прямой  $MN$  с окружностью.

В самом деле,  $PN \parallel AB$ , так как, как нетрудно видеть, данный чертеж представляет известное штейнеровское построение параллельных, если даны два равных отрезка  $AD$  и  $DB$ .

В силу равенства треугольников  $ADE$  и  $BDE$  будет

$$AE = EB. \quad (1)$$

А из равенства треугольников  $PFE$  и  $NFE$  (у которых  $EF$  — общая сторона,  $PF = FN$ , вследствие параллельности  $PN$  и  $AB$ , и  $\angle EFP = \angle NFE = d$ ):

$$PE = EN \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) как следствие выводится, что

$$AN = BP,$$

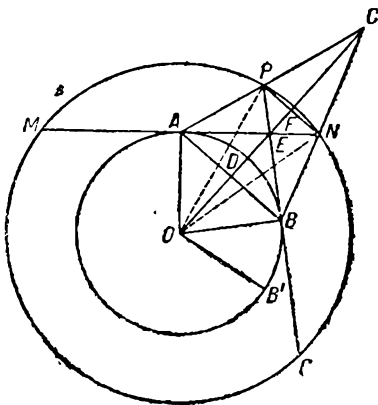
и в силу равенства прямоугольных треугольников  $OBP$  и  $OAN$  (по двум катетам)

$$ON = OP = R,$$

и следовательно,  $N$  лежит на окружности.

Если же прямая  $PQ$  не пересечет данной дуги, то берем иную прямую  $OB'$  и, повторяя указанное построение, получим прямую  $P'Q'$ , которая может пересечь данную дугу. Если же и в этом случае пересечения не произойдет, то берем опять новую прямую  $OB''$  и подобным же образом получаем прямую  $P''Q''$  и т. д. Проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской показал, что после конечного числа проб некоторая прямая  $P^nQ^n$  пересечет данную дугу. Нетрудно заметить, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $B'$  и т. д. лежат на окружности, concentричной с данной и касающейся прямой  $MN$ , ибо в силу построения отрезки  $OA = OB = OB'$  и т. д.

При этом прямые  $PQ$ ,  $P'Q'$ ,  $P''Q''$  и т. д. вследствие перпендикулярности соответственно к прямым  $OB$ ,  $OB'$ ,  $OB''$  и т. д. являются касательными к этой окружности.



Фиг. 6.

Иными словами, для того, чтобы найти точки пересечения произвольной прямой с окружностью, дуга и центр которой даны, надо найти такую касательную к окружности, концентричной с данной и касающейся данной прямой, которая пересекала бы данную дугу.

Если полученную фигуру будем проектировать, то чертеж, конечно, изменится в том смысле, что равные отрезки и углы станут неравными, но прямые спроектируются в прямые, касательные в касательные, и точки пересечения прямых останутся без изменения. Наши две концентрические окружности преобразуются в два подобных и концентрических конических сечения. Так как нам теперь придется иметь дело с ними, то напомним два известных свойства подобных и концентрично расположенных конических сечений.

7. Хорда конического сечения, касательная к внутреннему подобному концентрическому коническому сечению, делится в точке касания пополам.

8. Отрезки любой прямой, заключенные между двумя концентрическими и подобными коническими сечениями, равны.

После этих предварительных замечаний перейдем непосредственно к нахождению точек пересечения произвольной прямой с каким-либо коническим сечением, произвольная сколь угодно малая дуга которого, а также центр и один из фокусов которого (для параболы фокус и вершина) известны.

Для простоты ограничимся случаем эллипса, но все то, что будет сказано относительно него, может быть повторено относительно любого иного конического сечения.

Итак, пусть требуется определить точки пересечения прямой  $MN$  с эллипсом, дуга  $AD$  которого, а также фокус  $F$  и центр  $O$  известны (фиг. 7).

Согласно только что сделанным замечаниям эта прямая  $MN$  будет касательной к какому-то эллипсу, подобному и концентрично расположенному с данным. Для нахождения точки касания проведем прямую  $AB \parallel MN$  через какую-либо точку  $A$  данной дуги. Точка  $B$  определится по [§ 1 (5)]. Разделив  $AB$  пополам и соединив его середину  $E$  с центром, получим диаметр  $OE$ , пересекающий  $MN$  в точке  $C$ , которая и будет искомой точкой касания [§ 4 (7)]. Найдем еще четыре какие-нибудь точки, лежащие на этом же эллипсе. Для этого через произвольные точки  $A, F, G, D$  данной дуги и точку  $C$  проведем прямые  $AC, FC, GC$  и  $DC$ . По теореме Паскаля [§ 1 (5)] могут быть найдены соответственно точки  $P, L, K, H$  пересечения их с данным эллипсом. Теперь отложим на прямой  $DC$  отрезок  $DT = CH$ , что возможно [§ 1 (4)], на прямой  $GC$  — отрезок  $GS = CK$ , на прямой  $FC$  — отрезок  $FR = CL$  и на прямой  $AC$  — отрезок  $AQ = CP$ . Согласно [§ 4 (8)] точки  $Q, R, S, T$  принадлежат эллипсу, подобному и концентричному данному и касающемуся прямой  $MN$  в точке  $C$ .

Для нахождения точек пересечения прямой  $MN$  с эллипсом возьмем какую-нибудь точку  $B$  на внутреннем подобном и

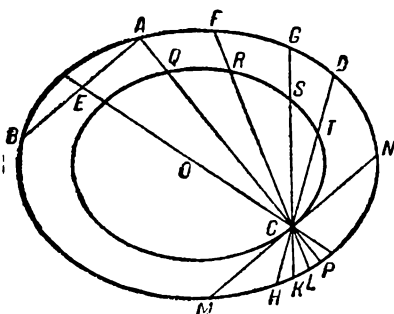
концентричном эллипсе, касающемся  $MN$  в  $A$  (фиг. 8). В точке  $B$  строим касательную  $PQ$  к указанному эллипсу.

Может случиться, что  $PQ$  пересечет данную дугу. Если же этого не произойдет, то возьмем другую точку  $B'$  на внутреннем эллипсе и в ней касательную  $P'Q'$ . Может случиться, что  $P'Q'$  пересечет данную дугу. Но вполне вероятно, что пересечения не произойдет. В последнем случае следует различать две возможные комбинации:

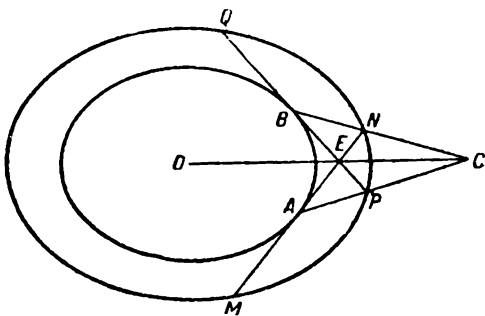
I. Данная дуга расположена между  $P$  и  $P'$ .

II. Точка  $P'$  находится с той же стороны дуги, что и  $P$ .

В первом случае возьмем точку  $B''$ , лежащую на внутреннем эллипсе между точками  $B$  и  $B'$ . Касательная  $P''Q''$  в ней пересекает эллипс в точке  $P''$ , расположенной между  $P$  и  $P'$ . Воз-



Фиг. 7.



Фиг. 8.

можно, что точка  $P''$  попадет на данную дугу. Если же этого не будет, то мы можем указать, между какими парами точек ( $P$  и  $P''$ ) или ( $P'$  и  $P''$ ) находится данная дуга.

Беря точку  $B'''$  эллипса между  $B$  и  $B''$  или между  $B'$  и  $B''$ , мы построим касательную  $P'''Q'''$ , которая пересечет внешний эллипс в  $P'''$ , расположенной на данной дуге; в противном случае мы сможем указать, между какими парами точек — ( $P$  и  $P'''$ ), или ( $P'$  и  $P'''$ ), или ( $P''$  и  $P'''$ ) — расположена дуга.

Повторяя указанное построение достаточно много раз, мы получим такие касательные  $P^{(m)}Q^{(m)}$ ,  $P^{(n)}Q^{(n)}$ , что одна из точек  $P^{(m)}$  и  $P^{(n)}$  находится на данной дуге или же дуга расположена между  $P^{(m)}$  и  $P^{(n)}$ .

Так как с увеличением числа построений дуги  $P^{(m)}$   $P^{(n)}$  уменьшаются безгранично, то после конечного числа проб получим дугу  $P^{(m)} P^{(n)}$  меньшую, чем данная, и следовательно, одна из двух точек —  $P^{(m)}$  или  $P^{(n)}$  — будет находиться на данной дуге.

Если же мы получим точки  $P$ ,  $P'$  с одной стороны дуги, то, беря точку  $B''$  так, чтобы угол  $BOB''$  был достаточно велик, мы после конечного числа проб получим такую касательную  $P'''Q'''$ , что данная дуга будет расположена между  $P$  и  $P'''$ , и следовательно, мы сведем этот случай к уже разобранным выше.



Предположим теперь, что касательная  $PQ$  пересекает данную дугу в точке  $P$ . Для определения точки  $N$  выполним следующие построения: соединим  $P$  с  $A$  и  $E$  с  $O$ . Соединим  $C$  с  $B$ . Тогда точка  $N$  пересечения  $BC$  с данной прямой  $MN$  и будет искомой точкой, лежащей на эллипсе, на основании соображений, высказанных в этом же параграфе.

## КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

И. Б. Абельсон (Москва)

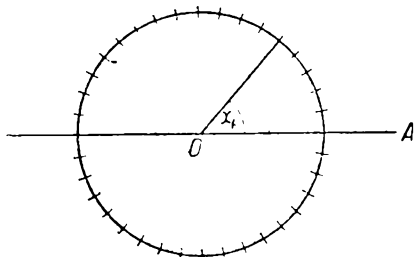
**Теорема Барбье.** Пусть замкнутая выпуклая линия обладает тем свойством, что расстояние между двумя любыми параллельными касательными есть величина постоянная, равная  $h$ . В таком случае длина кривой равна  $\pi h$ <sup>1)</sup>.

Предварительно докажем лемму<sup>2)</sup>.

**Лемма.** Если радиус, длины, равной единице, вращается и делает полный оборот, то среднее значение длины его проекции на заданную прямую равно  $\frac{2}{\pi}$

(длина проекции берется по абсолютной величине).

**Доказательство.** Предположим, что окружность единичного радиуса разделена на  $n$  равных частей и из центра проведены радиусы в точки деления. Будем проектировать их на постоянную ось, например  $OA$  (фиг. 1). Проекция какого-нибудь радиуса с номе-



Фиг. 1.

ром  $k$  равна  $1 \cdot |\cos x_k|$ , где  $x_k = \frac{2\pi \cdot k}{n}$  есть угол между радиусом и направлением  $OA$ . Среднее значение этих проекций равно

$\frac{\sum_{k=1}^n 1 \cdot |\cos x_k|}{n}$ . Чем больше  $n$ , тем точнее эта дробь выражает среднее значение величины проекции. Умножим числитель и знаменатель на величину приращения  $\Delta x$  (в радианах), где  $\Delta x = \frac{2\pi}{n}$ . Получим:

$$\frac{\sum_{k=1}^n \cos x_k \Delta x}{n \cdot \Delta x}.$$

<sup>1)</sup> Об этих кривых, называемых кривыми постоянной ширины и, вообще говоря, отличающихся от окружности, см. в книге Радемахер и Теплиц «Числа и фигуры», ОНТИ, 1935 г.

<sup>2)</sup> Здесь и ниже автор рассматривает лишь кривые постоянной ширины без угловых точек.

Перейдем к пределу, предполагая, что  $n$  неограниченно возрастает. Получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n |\cos x_k| \Delta x}{n \cdot \Delta x} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\cos x_k| \Delta x}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos x| dx.$$

Этот интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{2\pi} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

Итак, искомое среднее значение проекции (по абсолютному значению) на постоянную прямую равно  $\frac{2}{\pi}$ .

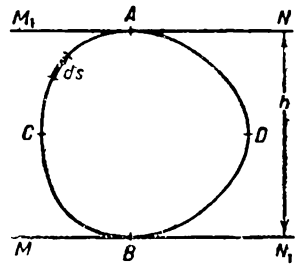
Тот же результат получится, если делить окружность на  $n$  неравных частей. Здесь существенно лишь то, что при  $n \rightarrow \infty$  длина любой части дуги окружности стремится к нулю.

Если вращающийся отрезок имеет длину, равную  $l$ , то для среднего значения проекции получится  $l \cdot \frac{2}{\pi}$ .

Переходим к доказательству теоремы Барбье.

Рассмотрим один (фиксированный) элемент нашего контура (фиг. 2). Вместо того чтобы обходить параллельными касательными вокруг контура, будем представлять себе, что контур поворачивается между двумя неподвижными параллельными прямыми  $M_1N$  и  $MN_1$ , расстояние между которыми равно  $h$ . Такое поворачивание возможно вследствие самого условия теоремы (ширина  $h$  постоянна). Это поворачивание не есть вращение контура вокруг определенного центра; наоборот, здесь мгновенный центр вращения будет смещаться. При рассматриваемом поворачивании избранный нами элемент дуги будет последовательно принимать всевозможные направления. Если элемент  $ds$  рассматривать как элементарный вектор и переносить начало вектора в определенную точку плоскости, то конец его опишет малую окружность с радиусом  $ds$ ; проектируя отрезок  $ds$ , как вращающийся радиус, на неподвижную прямую  $NN_1$ , мы по доказанной лемме имеем, что среднее значение проекции  $ds$  равно  $ds \cdot \frac{2}{\pi}$ . То же самое относится к любому другому элементу нашего контура.

Разбиваем контур на весьма большое число таких элементов и ищем среднее значение проекции суммы всех этих элементов.



Фиг. 2.

Оно равно сумме средних значений проекций отдельных элементов, т. е.  $\Sigma ds \cdot \frac{2}{\pi}$ . Увеличивая неограниченно число элементов, получим в пределе для искомой величины  $\oint ds \cdot \frac{2}{\pi}$ , причем интегрировать надо по всему контуру:

$$\oint ds \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \oint ds = \frac{2}{\pi} L,$$

где  $L$  — длина всего контура.

Но, с другой стороны, сумма проекций всех элементов контура на направление  $NN_1$  равна  $2h$  (каждая половина контура  $ACB$  и  $BDA$  дает проекцию, равную  $h$ ). Так как это имеет место для любого положения оборачивающегося контура, то и среднее значение суммы проекций также равно  $2h$ . (Среднее значение функции, сохраняющей постоянное значение, равно этой постоянной.) Из сравнения обоих результатов имеем:

$$\frac{2}{\pi} L = 2h, \text{ откуда } L = \pi h.$$

**Примечание.** Соображения, данные здесь в механической форме, можно облечь в обычные формулы, если воспользоваться двойными интегралами.

Содержание теоремы о постоянной ширине можно записать в виде равенства:

$$\int_q ds |\cos \alpha| = 2h, \quad (1)$$

где буква  $q$  означает интегрирование по контуру. Содержание леммы можно записать так:

$$\int_0^{2\pi} l |\cos \alpha| d\alpha = 4l. \quad (2)$$

Беря вместо  $l$  один элемент контура:

$$\int_0^{2\pi} ds |\cos \alpha| d\alpha = 4 ds, \quad (3)$$

и суммируя выражения (3) для всех элементов контура, в пределе приходим к двойному интегралу

$$\int_q \int_0^{2\pi} |\cos \alpha| d\alpha ds$$

(здесь стоящий слева интеграл относится к частице  $ds$ ).

Подинтегральная функция ограничена и непрерывна (знак модуля у  $\cos \alpha$  этому не мешает). Можно порядок интегрирования изменять.

Если сперва воспользоваться формулой (1), то двойной интеграл (4) приведет к

$$\int_0^{2\pi} 2h \cdot d\alpha = 2h \cdot 2\pi = 4\pi h.$$

Если же сперва интегрировать по формуле (2), то двойной интеграл приведет к

$$\int_q 4 ds = 4L;$$

откуда

$$4\pi h = 4L; \quad L = \pi h.$$

# ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЯ $\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^n$

В. А. Кудрявцев (Москва)

Рассмотрим уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^n, \quad (1)$$

где  $P, Q, R$  — функции от  $x$ , а  $n$  — действительное число (целое или дробное, положительное или отрицательное).

- 1) При  $n=2$  имеем уравнение Риккати.
- 2) При  $R=0$  имеем линейное уравнение.
- 3) При  $P=0$  имеем уравнение Бернулли.
- 4) Если  $P, Q, R$  постоянны, то переменные разделяются и уравнение (1) интегрируется в квадратурах.
- 5) Также, если

$$P : Q : R = p : q : r,$$

где  $p, q, r$  постоянны, то переменные разделяются. В самом деле, пусть

$$\frac{P}{p} = \frac{Q}{q} = \frac{R}{r} = f(x);$$

тогда

$$P = pf(x), \quad Q = qf(x), \quad R = rf(x);$$

и, подставляя в уравнение (1), имеем:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)(p + qy + ry^n).$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dy}{p + qy + ry^n} = f(x) dx,$$

или

$$\int \frac{dy}{p + qy + ry^n} = \int f(x) dx.$$

Уравнение (1) в этом случае интегрируется в квадратурах. При  $n = 2$  мы имеем уравнение Риккати, которое в этих условиях интегрируется в квадратурах.

Поставим себе задачей найти некоторые другие случаи, в которых уравнение (1) интегрируется в квадратурах. Для этого введем новое переменное  $z$  подстановкой

$$y = u \cdot z, \quad (2)$$

где  $u$  — некоторая неопределенная пока функция от  $x$ . Взяв производную от (2) и подставляя в (1), имеем:

$$u \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dx} z = P + Quz + Ru^n z^n \quad (3)$$

или, перенося  $Quz$  налево и вынося  $z$  за скобку, имеем:

$$u \frac{dz}{dx} + z \left( \frac{du}{dx} - Qu \right) = P + Ru^n z^n. \quad (4)$$

Подберем теперь  $u$  таким образом, чтобы из уравнения (4) исчезло  $z$  в первой степени. Для этого положим

$$\frac{du}{dx} - Qu = 0. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (5), найдем  $u$ . Разделяя переменные в уравнении (5), имеем:

$$\frac{du}{u} = Q dx.$$

Интегрируя, имеем:

$$\ln u = \int Q dx,$$

или

$$u = e^{\int Q dx} \quad (6)$$

Подставляя значение (6) для  $u$  в уравнение (4), имеем:

$$e^{\int Q dx} \frac{dz}{dx} = P + R e^{n \int Q dx} z^n. \quad (7)$$

Если положить теперь

$$\frac{R}{P} e^{n \int Q dx} = \text{постоянному}, \quad (8)$$

то переменные в уравнении (7) разделяются и уравнение интегрируется в квадратурах.

В самом деле, положим

$$\frac{R}{P} e^{n \int Q dx} = a, \quad (9)$$

где  $a$  постоянное.

---

<sup>1)</sup> Не нарушая общности, мы можем произвольную постоянную опустить.

Отсюда имеем:

$$R = aPe^{-n\int Q dx}. \quad (10)$$

Внося значение (10) для  $R$  в уравнение (7), имеем:

$$e^{\int Q dx} \frac{dz}{dx} = P + aPe^{-n\int Q dx} \cdot e^{n\int Q dx} \cdot z^n,$$

или после элементарных преобразований

$$e^{\int Q dx} \frac{dz}{dx} = P(1 + az^n). \quad (11)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dz}{1 + az^n} = Pe^{-\int Q dx} \cdot dx. \quad (12)$$

Взяв интеграл от обеих частей, имеем:

$$\int \frac{dz}{1 + az^n} = \int Pe^{-\int Q dx} \cdot dx + C. \quad (13)$$

Это уравнение, связывающее  $z$  и  $x$ . Что касается  $y$ , то, воспользовавшись выражением (6) для  $u$ , увидим, что  $y$  согласно формуле (2) представится так:

$$y = e^{\int Q dx} \cdot z. \quad (14)$$

Исключая  $z$  между уравнениями (13) и (14), получим общий интеграл уравнения (1) в случае, если соблюдено условие (8).

Итак, если  $\frac{R}{P} e^{n\int Q dx}$  равно постоянному, то уравнение (1) интегрируется в квадратурах.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - \frac{2}{x}y + x^2y^2. \quad (A)$$

Это уравнение Риккати. Здесь

$$P = x^3; \quad Q = -\frac{2}{x}; \quad R = x^2; \quad n = 2.$$

Имеем:

$$\int Q dx = -2 \int \frac{dx}{x} = -2 \ln x = \ln x^{-2};$$

$$u = e^{\int Q dx} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2};$$

$$e^{n\int Q dx} = e^{2 \int Q dx} = e^{2 \ln x^{-2}} = e^{\ln x^{-4}} = \frac{1}{x^4}.$$

Имеем, далее:

$$\frac{R}{P} e^{n\int Q dx} = \frac{x^2}{x^3} \cdot \frac{1}{x^4} = 1 = \text{постоянному}.$$

Итак, условие интегрируемости соблюдено.

Делая подстановку в уравнение (A)

$$y = \frac{1}{x^3} z,$$

имеем:

$$\frac{1}{x^3} \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x^2} z = x^3 - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^3} z + x^7 \cdot \frac{1}{x^4} z^2,$$

или после сокращения:

$$\frac{1}{x^3} \frac{dz}{dx} = x^3 (1 + z^2).$$

Здесь переменные разделяются. Имеем:

$$\frac{dz}{1 + z^2} = x^3 dx,$$

или, интегрируя:

$$\int \frac{dz}{1 + z^2} = \int x^3 dx + C.$$

Выполняя квадратуры, имеем:

$$\operatorname{arctg} z = \frac{x^4}{6} + C,$$

отсюда

$$z = \operatorname{tg} \left( \frac{x^4}{6} + C \right)$$

или

$$y = \frac{1}{x^3} \operatorname{tg} \left( \frac{x^4}{6} + C \right).$$

Таково общее решение уравнения (A).

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x - y + e^{\frac{3}{2}x} \sqrt{y}. \quad (B)$$

Здесь

$$P = 2e^x; \quad Q = -1; \quad R = e^{\frac{3}{2}x}; \quad n = \frac{1}{2};$$

$$\int Q dx = -\int dx = -x; \quad u = e^{\int Q dx} = e^{-x}.$$

Далее, имеем:

$$\frac{R}{P} e^{\int Q dx} = \frac{e^{\frac{3}{2}x}}{2e^x} e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} = \text{постоянному}.$$

Условие интегрируемости соблюдено.

Делаем подстановку в уравнение (B)

$$y = e^{-x} z, \quad (C)$$

имеем:

$$e^{-x} \frac{dz}{dx} - e^{-x} z = 2e^x - e^{-x} z + e^{\frac{3}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{z},$$

или после сокращения:

$$e^{-x} \frac{dz}{dx} = e^x (2 + \sqrt{z}).$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\frac{dz}{2 + \sqrt{z}} = e^{2x} dx; \quad \int \frac{dz}{2 + \sqrt{z}} = \int e^{2x} dx + C \quad (D)$$

Полагая  $\sqrt{z} = t$ , имеем:  $z = t^2$ ;  $dz = 2t dt$ ;

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{2 + \sqrt{z}} &= \int \frac{2t dt}{2 + t} = 2 \int \frac{t + 2 - 2}{2 + t} dt = 2 \int dt - 4 \int \frac{dt}{2 + t} = \\ &= 2t - 4 \ln(2 + t) = 2\sqrt{z} - 4 \ln(2 + \sqrt{z}). \end{aligned}$$

Имеем также:

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Подставляя в уравнение (D), получаем, следовательно,

$$2\sqrt{z} - 4 \ln(2 + \sqrt{z}) = \frac{e^{2x}}{2} + C. \quad (E)$$

Из уравнения (C) имеем:

$$z = e^x y.$$

Подставляя  $z$  в уравнение (E), получим общий интеграл уравнения (A):

$$2e^{\frac{1}{2}x} \sqrt{y} - 4 \ln \left( 2 + e^{\frac{1}{2}x} \sqrt{y} \right) = \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{2x}{1+x^2}y + x^2(1+x^2)y^{-1}. \quad (F)$$

Здесь

$$P = x^2; \quad Q = \frac{2x}{1+x^2}; \quad R = x^2(1+x^2); \quad n = -1;$$

$$\int Q dx = \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \ln(1+x^2); \quad u = e^{\int Q dx} = 1+x^2.$$

Имеем, далее:

$$\frac{R}{P} e^{\int Q dx} = \frac{x^2(1+x^2)}{x^2} e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{x^2(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1 = \text{постоянному}.$$

Условие интегрируемости соблюдено.

Делая в уравнении (F) подстановку

$$y = (1+x^2)z, \quad (G)$$

имеем:

$$(1+x^2) \frac{dz}{dx} + 2xz = x^2 + \frac{2x}{1+x^2}(1+x^2)z + x^2(1+x^2)(1+x^2)^{-1} \cdot z^{-1},$$

или

$$(1+x^2) \frac{dz}{dx} = x^2(1+z^{-1}),$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{dz}{1+z^{-1}} = \frac{x^2 dx}{1+x^2}.$$

\*Взяв интеграл от обеих частей, имеем:

$$\int \frac{dz}{1+z^{-1}} = \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} + C. \quad (H)$$



Вычисляем интегралы в обеих частях уравнения (H):

$$\int \frac{dz}{1+z^{-1}} = \int \frac{z dz}{z+1} = \int \frac{z+1-1}{z+1} dz = \int dz - \int \frac{dz}{z+1} = z - \ln(z+1);$$

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x.$$

Уравнение (H) примет вид:

$$z - \ln(z+1) = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Из уравнения (G) имеем:

$$z = \frac{y}{1+x^2}.$$

Подставляя  $z$  в уравнение (J), после несложных преобразований имеем:

$$\frac{y}{1+x^2} - \ln \left( \frac{y+x^2+1}{1+x^2} \right) = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Таков общий интеграл уравнения (F).

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДАНДЕЛЕНА

М. П. Черняев (Ростов-на-Дону)

Пусть дан однополостный гиперboloид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

На его поверхности возьмем три произвольные точки:

$$A_1(x_1, y_1, z_1), \quad A_2(x_2, y_2, z_2), \quad A_3(x_3, y_3, z_3).$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{x_1 + z_1}{a + c}; & \lambda_2 &= \frac{x_2 + z_2}{a + c}; & \lambda_3 &= \frac{x_3 + z_3}{a + c}; \\ \mu_1 &= \frac{x_1 + z_1}{1 - \frac{y_1}{b}}; & \mu_2 &= \frac{x_2 + z_2}{1 - \frac{y_2}{b}}; & \mu_3 &= \frac{x_3 + z_3}{1 - \frac{y_3}{b}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{(\lambda_1 \mu_1 + 1) a}{\lambda_1 + \mu_1}; & y_1 &= \frac{(\mu_1 - \lambda_1) b}{\lambda_1 + \mu_1}; & z_1 &= \frac{(\lambda_1 \mu_1 - 1) c}{\lambda_1 + \mu_1}; \\ x_2 &= \frac{(\lambda_2 \mu_2 + 1) a}{\lambda_2 + \mu_2}; & y_2 &= \frac{(\mu_2 - \lambda_2) b}{\lambda_2 + \mu_2}; & z_2 &= \frac{(\lambda_2 \mu_2 - 1) c}{\lambda_2 + \mu_2}; \\ x_3 &= \frac{(\lambda_3 \mu_3 + 1) a}{\lambda_3 + \mu_3}; & y_3 &= \frac{(\mu_3 - \lambda_3) b}{\lambda_3 + \mu_3}; & z_3 &= \frac{(\lambda_3 \mu_3 - 1) c}{\lambda_3 + \mu_3}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точки  $A_1, A_2, A_3$ , соответственно будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda_1 \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \\ \lambda_1 \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = 1 - \frac{y}{b} \end{aligned} \right\} (l_1), \quad \left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda_2 \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \\ \lambda_2 \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = 1 - \frac{y}{b} \end{aligned} \right\} (l_2), \quad \left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda_3 \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \\ \lambda_3 \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = 1 - \frac{y}{b} \end{aligned} \right\} (l_3); \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu_1 \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \\ \mu_1 \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = 1 + \frac{y}{b} \end{aligned} \right\} (g_1); \quad \left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu_2 \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \\ \mu_2 \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = 1 + \frac{y}{b} \end{aligned} \right\} (g_2), \quad \left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu_3 \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \\ \mu_3 \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = 1 + \frac{y}{b} \end{aligned} \right\} (g_3). \quad (5)$$

Точки пересечения прямых (4) и (5) обозначим так:  $l_2$  и  $g_1 - B_1$ ;  $l_2$  и  $g_3 - B_2$ ;  $l_1$  и  $g_3 - B_3$ ;  $l_1$  и  $g_2 - B_4$ ;  $l_3$  и  $g_2 - B_5$ ;  $l_3$  и  $g_1 - B_6$ .

Точки  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  всегда существуют, так как прямолинейные образующие двух различных систем всегда пересекаются. Предметом настоящей заметки будет элементарное аналитическое доказательство двух следующих взаимных теорем Данделена, которые являются обобщением известных теорем Паскаля и Брианшона.

I. Три прямые  $k_1, k_2$ , и  $k_3$  пересечения плоскостей  $B_6B_1B_2$  и  $B_3B_4B_5$ ,  $B_1B_2B_3$  и  $B_4B_5B_6$ ,  $B_2B_3B_4$  и  $B_5B_6B_1$  лежат в одной плоскости (плоскости Паскаля  $A_1A_2A_3$ ).

II. Три прямые  $B_1B_4$ ,  $B_2B_5$  и  $B_3B_6$  пересекаются в одной точке (точка Брианшона  $\beta$ ).

Координаты точек  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  будут:

$$\left. \begin{aligned} B_1 \left[ \frac{a(\mu_1\lambda_2 + 1)}{\mu_1 + \lambda_2}, \frac{b(\mu_1 - \lambda_2)}{\mu_1 + \lambda_2}, \frac{c(\mu_1\lambda_2 - 1)}{\mu_1 + \lambda_2} \right]; \\ B_2 \left[ \frac{a(\mu_3\lambda_2 + 1)}{\mu_3 + \lambda_2}, \frac{b(\mu_3 - \lambda_2)}{\mu_3 + \lambda_2}, \frac{c(\mu_3\lambda_2 - 1)}{\mu_3 + \lambda_2} \right]; \\ B_3 \left[ \frac{a(\mu_3\lambda_1 + 1)}{\mu_3 + \lambda_1}, \frac{b(\mu_3 - \lambda_1)}{\mu_3 + \lambda_1}, \frac{c(\mu_3\lambda_1 - 1)}{\mu_3 + \lambda_1} \right]; \\ B_4 \left[ \frac{a(\mu_2\lambda_1 + 1)}{\mu_2 + \lambda_1}, \frac{b(\mu_2 - \lambda_1)}{\mu_2 + \lambda_1}, \frac{c(\mu_2\lambda_1 - 1)}{\mu_2 + \lambda_1} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} B_6 \left[ \frac{a(\mu_2\lambda_3 + 1)}{\mu_2 + \lambda_3}, \quad \frac{b(\mu_2 - \lambda_3)}{\mu_2 + \lambda_3}, \quad \frac{c(\mu_2\lambda_3 - 1)}{\mu_2 + \lambda_3} \right]; \\ B_6 \left[ \frac{a(\mu_1\lambda_3 + 1)}{\mu_1 + \lambda_3}, \quad \frac{b(\mu_1 - \lambda_3)}{\mu_1 + \lambda_3}, \quad \frac{c(\mu_1\lambda_3 - 1)}{\mu_1 + \lambda_3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнения прямых  $B_1B_4$ ,  $B_2B_5$  и  $B_3B_6$  будут:

$$\left. \begin{aligned} (B_1B_4) \quad & \frac{x - \frac{a(\mu_2\lambda_1 + 1)}{\mu_2 + \lambda_1}}{a \left[ \frac{\mu_1\lambda_2 + 1}{\mu_1 + \lambda_2} - \frac{\mu_2\lambda_1 + 1}{\mu_2 + \lambda_1} \right]} = \frac{y - \frac{b(\mu_2 - \lambda_1)}{\mu_2 + \lambda_1}}{b \left[ \frac{\mu_1 - \lambda_2}{\mu_1 + \lambda_2} - \frac{\mu_2 - \lambda_1}{\mu_2 + \lambda_1} \right]} = \\ & = \frac{z - \frac{c(\mu_2\lambda_1 - 1)}{\mu_2 + \lambda_1}}{c \left[ \frac{\mu_1\lambda_2 - 1}{\mu_1 + \lambda_2} - \frac{\mu_2\lambda_1 - 1}{\mu_2 + \lambda_1} \right]}; \\ (B_2B_5) \quad & \frac{x - \frac{a(\mu_2\lambda_3 + 1)}{\mu_2 + \lambda_3}}{a \left[ \frac{\mu_3\lambda_2 + 1}{\mu_3 + \lambda_2} - \frac{\mu_2\lambda_3 + 1}{\mu_2 + \lambda_3} \right]} = \frac{y - \frac{b(\mu_2 - \lambda_3)}{\mu_2 + \lambda_3}}{b \left[ \frac{\mu_3 - \lambda_2}{\mu_3 + \lambda_2} - \frac{\mu_2 - \lambda_3}{\mu_2 + \lambda_3} \right]} = \\ & = \frac{z - \frac{c(\mu_2\lambda_3 - 1)}{\mu_2 + \lambda_3}}{c \left[ \frac{\mu_3\lambda_2 - 1}{\mu_3 + \lambda_2} - \frac{\mu_2\lambda_3 - 1}{\mu_2 + \lambda_3} \right]}; \\ (B_3B_6) \quad & \frac{x - \frac{a(\mu_1\lambda_3 + 1)}{\mu_1 + \lambda_3}}{a \left[ \frac{\mu_3\lambda_1 + 1}{\mu_3 + \lambda_1} - \frac{\mu_1\lambda_3 + 1}{\mu_1 + \lambda_3} \right]} = \frac{y - \frac{b(\mu_1 - \lambda_3)}{\mu_1 + \lambda_3}}{b \left[ \frac{\mu_3 - \lambda_1}{\mu_3 + \lambda_1} - \frac{\mu_1 - \lambda_3}{\mu_1 + \lambda_3} \right]} = \\ & = \frac{z - \frac{c(\mu_1\lambda_3 - 1)}{\mu_1 + \lambda_3}}{c \left[ \frac{\mu_3\lambda_1 - 1}{\mu_3 + \lambda_1} - \frac{\mu_1\lambda_3 - 1}{\mu_1 + \lambda_3} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Уравнения плоскостей  $B_6B_1B_2$ ,  $B_3B_4B_5$ ,  $B_1B_2B_3$ ,  $B_4B_5B_6$ ,  $B_2B_3B_4$  и  $B_5B_6B_1$  будут:

$$\left. \begin{aligned} (B_6B_1B_2) \quad & \frac{x}{a}(\lambda_2\mu_1 + 1) + \frac{y}{b}(\mu_1 - \lambda_2) + \frac{z}{c}(1 - \lambda_2\mu_1) = \lambda_2 + \mu_1; \\ (B_3B_4B_5) \quad & \frac{x}{a}(\lambda_1\mu_2 + 1) + \frac{y}{b}(\mu_2 - \lambda_1) + \frac{z}{c}(1 - \lambda_1\mu_2) = \lambda_1 + \mu_2; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} (B_1 B_2 B_3) \frac{x}{a} (\lambda_2 \mu_3 + 1) + \frac{y}{b} (\mu_3 - \lambda_2) + \frac{z}{c} (1 - \lambda_2 \mu_3) &= \lambda_2 + \mu_3; \\ (B_4 B_5 B_6) \frac{x}{a} (\lambda_3 \mu_2 + 1) + \frac{y}{b} (\mu_2 - \lambda_3) + \frac{z}{c} (1 - \lambda_3 \mu_2) &= \lambda_3 + \mu_2; \\ (B_2 B_3 B_4) \frac{x}{a} (\lambda_1 \mu_3 + 1) + \frac{y}{b} (\mu_3 - \lambda_1) + \frac{z}{c} (1 - \lambda_1 \mu_3) &= \lambda_1 + \mu_3; \\ (B_5 B_6 B_1) \frac{x}{a} (\lambda_3 \mu_1 + 1) + \frac{y}{b} (\mu_1 - \lambda_3) + \frac{z}{c} (1 - \lambda_3 \mu_1) &= \lambda_3 + \mu_1. \end{aligned} \right\} (8)$$

Уравнения прямых  $k_1, k_2, k_3$  будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{2 (\lambda_2 \mu_2 - \lambda_1 \mu_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1) (\mu_1 \mu_2 + 1) + (\mu_2 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_2 + 1)} + \\ &+ [(\lambda_2 - \lambda_1) (\mu_1 \mu_2 - 1) + (\mu_2 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_2 - 1)] t; \\ \frac{y}{b} &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) (\mu_2 \mu_2 - 1) - (\mu_2 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_2 - 1)}{(\lambda_2 - \lambda_1) (\mu_1 \mu_2 + 1) + (\mu_2 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_2 + 1)} + \\ &+ 2 (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) t; \\ \frac{z}{c} &= [(\lambda_2 - \lambda_1) (\mu_1 \mu_2 + 1) + (\mu_2 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_2 + 1)] t. \end{aligned} \right\} (k_1) (9')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{2 (\lambda_3 \mu_3 - \lambda_2 \mu_2)}{(\lambda_3 - \lambda_2) (\mu_2 \mu_3 + 1) + (\mu_3 - \mu_2) (\lambda_2 \lambda_3 + 1)} + \\ &+ [(\lambda_3 - \lambda_2) (\mu_2 \mu_3 - 1) + (\mu_3 - \mu_2) (\lambda_2 \lambda_3 - 1)] t; \\ \frac{y}{b} &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_2) (\mu_2 \mu_3 - 1) - (\mu_3 - \mu_2) (\lambda_2 \lambda_3 - 1)}{(\lambda_3 - \lambda_2) (\mu_2 \mu_3 + 1) + (\mu_3 - \mu_2) (\lambda_2 \lambda_3 + 1)} + 2 (\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) t; \\ \frac{z}{c} &= [(\lambda_3 - \lambda_2) (\mu_2 \mu_3 + 1) + (\mu_3 - \mu_2) (\lambda_2 \lambda_3 + 1)] t. \end{aligned} \right\} (k_2) (9'')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{2 (\lambda_3 \mu_3 - \lambda_1 \mu_1)}{(\lambda_3 - \lambda_1) (\mu_1 \mu_3 + 1) + (\mu_3 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_3 + 1)} + \\ &+ [(\lambda_3 - \lambda_1) (\mu_1 \mu_3 - 1) + (\mu_3 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_3 - 1)] t; \\ \frac{y}{b} &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_1) (\mu_1 \mu_3 - 1) - (\mu_3 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_3 - 1)}{(\lambda_3 - \lambda_1) (\mu_1 \mu_3 + 1) + (\mu_3 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_3 + 1)} + 2 (\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1) t; \\ \frac{z}{c} &= [(\lambda_3 - \lambda_1) (\mu_1 \mu_3 + 1) + (\mu_3 - \mu_1) (\lambda_1 \lambda_3 + 1)] t. \end{aligned} \right\} (k_3) (9''')$$

Уравнение плоскости  $A_1 A_2 A_3$  будет:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{x}{a}; & \frac{y}{b}; & \frac{z}{c}; & 1 \\ \lambda_1 \mu_1 + 1; & \mu_1 - \lambda_1; & \lambda_1 \mu_1 - 1; & \lambda_1 + \mu_1 \\ \lambda_2 \mu_2 + 1; & \mu_2 - \lambda_2; & \lambda_2 \mu_2 - 1; & \lambda_2 + \mu_2 \\ \lambda_3 \mu_3 + 1; & \mu_3 - \lambda_3; & \lambda_3 \mu_3 - 1; & \lambda_3 + \mu_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Так как координаты  $x, y, z$  точек прямых  $k_1, k_2, k_3$  при любых значениях параметра  $t$  удовлетворяют уравнению плоскости  $A_1 A_2 A_3$  (10), то мы можем заключить, что три прямые  $k_1, k_2, k_3$  лежат в одной плоскости  $A_1 A_2 A_3$ .

Действительно, заменяя в (10)  $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$  их выражениями из (9'), имеем:

$$\Delta = \frac{-4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_1 \mu_2 + 1) + (\mu_2 - \mu_1)(\lambda_1 \lambda_2 + 1)} \times \\ \times \begin{vmatrix} \lambda_2 \mu_2 - \lambda_1 \mu_1; & \lambda_2 - \lambda_1 + 2\lambda_1 \lambda_2 (\mu_2 - \mu_1); & 0; & (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_1 \mu_2 + 1) + (\mu_2 - \mu_1)(\lambda_1 \lambda_2 + 1) \\ 1 & ; & \lambda_1 & ; & \lambda_1 \mu_1 - 1; & \lambda_1 + \mu_1 \\ 1 & ; & \lambda_2 & ; & \lambda_2 \mu_2 - 1; & \lambda_2 + \mu_2 \\ 1 & ; & \lambda_3 & ; & \lambda_3 \mu_3 - 1; & \lambda_3 + \mu_3 \end{vmatrix} + \\ + 4t \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2; & \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1; & \lambda_2 \mu_1 \mu_2 - \lambda_1 \mu_1 \mu_2 + \mu_2 \lambda_1 \lambda_2 - \mu_1 \lambda_1 \lambda_2; & 0 \\ 1 & ; & \mu_1 & ; & \lambda_1 \mu_1 & ; & \lambda_1 + \mu_1 \\ 1 & ; & \mu_2 & ; & \lambda_2 \mu_2 & ; & \lambda_2 + \mu_2 \\ 1 & ; & \mu_3 & ; & \lambda_3 \mu_3 & ; & \lambda_3 + \mu_3 \end{vmatrix}.$$

Легко показать, что каждый из входящих в последнюю формулу определителей равен нулю; значит,  $\Delta = 0$  при любом значении  $t$ .

Аналогичный результат мы получим, если подставим вместо  $\frac{x}{a}$ ,

$\frac{y}{b}$  и  $\frac{z}{c}$  их выражения из формул (9'') и (9''').

Итак, первая часть теоремы доказана.

Три прямые  $B_1 B_4, B_2 B_5$  и  $B_3 B_6$  попарно пересекаются, так как одновременно выполняются условия их пересечения.

Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\mu_2 \lambda_3 + 1}{\mu_2 + \lambda_3} - \frac{\mu_2 \lambda_1 + 1}{\mu_2 + \lambda_1}; & \frac{\mu_2 - \lambda_3}{\mu_2 + \lambda_3} - \frac{\mu_2 - \lambda_1}{\mu_2 + \lambda_1}; & \frac{\mu_2 \lambda_3 - 1}{\mu_2 + \lambda_3} - \frac{\mu_2 \lambda_1 - 1}{\mu_2 + \lambda_1} \\ \frac{\mu_1 \lambda_2 + 1}{\mu_1 + \lambda_2} - \frac{\mu_2 \lambda_1 + 1}{\mu_2 + \lambda_1}; & \frac{\mu_1 - \lambda_2}{\mu_1 + \lambda_2} - \frac{\mu_2 - \lambda_1}{\mu_2 + \lambda_1}; & \frac{\mu_1 \lambda_2 - 1}{\mu_1 + \lambda_2} - \frac{\mu_2 \lambda_1 - 1}{\mu_2 + \lambda_1} \\ \frac{\mu_3 \lambda_3 + 1}{\mu_3 + \lambda_2} - \frac{\mu_2 \lambda_3 + 1}{\mu_2 + \lambda_3}; & \frac{\mu_3 - \lambda_2}{\mu_3 + \lambda_2} - \frac{\mu_2 - \lambda_3}{\mu_2 + \lambda_3}; & \frac{\mu_3 \lambda_3 - 1}{\mu_3 + \lambda_2} - \frac{\mu_2 \lambda_3 - 1}{\mu_2 + \lambda_3} \end{vmatrix} = \\ = \frac{2(\lambda_3 - \lambda_1)}{(\mu_2 + \lambda_3)^2 (\mu_2 + \lambda_1)^2 (\mu_1 + \lambda_2) (\mu_3 + \lambda_2)} \times \\ \times \begin{vmatrix} \mu_2^2 - 1; & -\mu_2^2; & \mu_2^2 + 1. \\ (\mu_1 \mu_3 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1) - (\lambda_1 \lambda_2 - 1)(\mu_2 - \mu_1); & \mu_1 \lambda_1 - \mu_2 \lambda_2; & (\mu_1 \mu_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_1) - (\lambda_1 \lambda_2 + 1)(\mu_2 - \mu_1) \\ (\mu_2 \mu_3 - 1)(\lambda_3 - \lambda_2) - (\lambda_2 \lambda_3 - 1)(\mu_3 - \mu_3); & \mu_3 \lambda_3 - \mu_2 \lambda_3; & (\mu_2 \mu_3 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3) - (\lambda_1 \lambda_2 + 1)(\mu_2 - \mu_3) \end{vmatrix}$$

Вычтем из элементов третьего столбца элементы первого, затем к элементам первого столбца полученного определителя прибавим элементы третьего; далее, к элементам первого столбца прибавим элементы второго, предварительно умноженные на  $\mu_2$ ; наконец, к элементам второго столбца таким образом полученного определителя прибавим элементы третьего столбца, предварительно умноженные на  $\mu_2$ ; окончательно убеждаемся, что  $\Delta = 0$ .

Аналогично убедимся, что прямые  $B_2B_5$  и  $B_3B_6$ ,  $B_3B_6$  и  $B_1B_4$  пересекаются. Так как три прямые  $B_1B_4$ ,  $B_2B_5$  и  $B_3B_6$  пересекаются попарно и не лежат в одной плоскости, то все они пересекаются в одной общей точке, что и требовалось доказать.

## ПРИБЛИЖЕННАЯ ЗАМЕНА ЦЕПНОЙ ЛИНИИ ПАРАБОЛОЙ ИЛИ ЭЛЛИПСОМ

Д. М. Синцов (Харьков)

В замечательном курсе Д'Оканя (М. d'Ocagne), создателя номографии, юбилей которого не так давно торжественно праздновался в Париже, — „Cours de géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique“, т. I—II, — есть интересный пример, иллюстрирующий применение теории прикосновения плоских кривых к практическому вопросу.

Если вы спросите инженера, то он вам скажет, что цепной линии, когда она им встречается, они не чертят, а заменяют ее параболой, но вряд ли вы получите разъяснение, почему это можно делать. Д'Окань дает не только это разъяснение, но указывает, как можно сделать еще лучше.

Пусть

$$y + a = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \quad (1)$$

уравнение цепной линии, отнесенной к ее оси симметрии и касательной в вершине (вогнутость обращена в сторону положительных ординат).

Разложение  $y$  в строку в соседстве вершины дает

$$y = \frac{x^2}{2! a} + \frac{x^4}{4! a^3} + \frac{x^6}{6! a^5} + \dots \quad (1')$$

Таким образом при очень большом  $a$  в сравнении с  $x$  (или с  $2x$ , т. е. с хордой, параллельной касательной в вершине), члены, начиная уже с  $\frac{x^4}{24a^3}$ , могут быть отброшены, как это и делается в технике; приближение будет третьего порядка. Как указывает Д'Окань, в технических приложениях цепной линии применяется ее дуга, не превышающая дуги, соответствующей  $x = \frac{4}{10} a$ . Таким образом полухорда не превышает  $\frac{4}{10} a$ ,

и, следовательно, при таком отбрасывании ошибка будет порядка

$$\frac{a \cdot 4^4}{10^4 \cdot 4!} = \frac{32a}{30\,000} \approx \frac{a}{1\,000}.$$

В самом деле, она равна

$$\frac{x^4}{4! a^3} \cdot \left( 1 + \frac{x^2}{5 \cdot 6 a^2} + \frac{x^4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 a^4} + \frac{x^6}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 a^6} + \dots \right) < \\ < \frac{x^4}{4! a^3} \cdot \left( 1 + \frac{x^2}{25 a^2} + \frac{x^4}{2 \cdot 25^2 a^4} + \frac{x^6}{3 \cdot 25^3 a^6} + \dots \right),$$

т. е. меньше, чем

$$\frac{x^4}{4! a^3} \left[ 1 - \ln \left( 1 - \left( \frac{x}{5a} \right)^2 \right) \right].$$

При данных Д'Оканя она, таким образом, менее

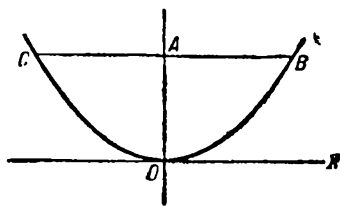
$$\frac{a \cdot \left( \frac{4}{10} \right)^4}{24} \left[ 1 - \ln \left( 1 - \frac{4}{625} \right) \right].$$

Второй множитель менее

$$1 + \frac{4}{625} = 1,0064.$$

Если обратить внимание на то, что стрелка  $OA$  [т. е. ордината параболы, соответствующая абсциссе  $x = \frac{4a}{10}$ , (фиг. 1)] равна

$$\frac{a \cdot 16}{200}, \text{ т. е. равна } \frac{2a}{25}, \text{ то погрешность равна приблизительно } \frac{OA}{75}.$$



Фиг. 1.

Но, как показывает Д'Окань, можно достичь значительно большего приближения, если брать не параболу, а кривую второго порядка, имеющую с цепной линией прикосновение возможно высокого порядка. Коническое сечение, имеющее с цепной линией прикосновение второго или высшего порядка в вершине — начале координат, не должно иметь в уравнении членов нулевого и первого порядка

в отношении  $x$ . Кроме того, в силу симметрии уравнения цепной линии относительно оси ординат должен отсутствовать и член с произведением  $xy$ .

Поэтому уравнение искомого конического сечения должно быть вида:

$$x^2 + \lambda y^2 + 2\mu y = 0. \quad (2)$$

Дифференцируем это выражение четыре раза. Имеем:

$$1) \quad 2x + 2\lambda y y' + 2\mu y' = 0.$$

$$2) \quad 2 + 2\lambda (y'^2 + y y'') + 2\mu y'' = 0.$$

$$3) \quad 2\lambda (3y' y'' + y y''') + 2\mu y''' = 0.$$

$$4) \quad 2\lambda (3y''^2 + 4y' y''' + y y^{IV}) + 2\mu y^{IV} = 0.$$

Если при замене  $y, y', y'', y''', y^{IV}$  их значениями для цепной линии в начале координат:

$$y_0 = 0, \quad y_0' = 0, \quad y_0'' = \frac{1}{a}, \quad y_0''' = 0, \quad y_0^{IV} = \frac{1}{a^2},$$

все четыре уравнения окажутся выполненными, кривая (2) будет иметь с цепной линией прикосновение четвертого порядка; и действительно для этих значений первое и третье уравнения удовлетворяются тождественно.

Второе дает:

$$2 + 2 \frac{\mu}{a} = 0,$$

значит

$$\mu = -a.$$

Четвертое дает:

$$2 \cdot 3\lambda \cdot \frac{1}{a^2} + 2\mu \frac{1}{a^3} = 0,$$

значит

$$\lambda = \frac{1}{3}.$$

Таким образом получаем кривую второго порядка:

$$x^2 + \frac{y^2}{3} - 2ay = 0, \quad (2')$$

которая согласно приведенному подсчету Д'Оканя имеет с цепной линией прикосновение четвертого порядка в ее вершине.

Но можно показать, что прикосновение будет даже не четвертого, а пятого порядка. В самом деле, если еще раз продифференцировать 4, то получим:

$$2\lambda(10y''y''' + 5y'y^{IV} + yy^V) + 2\mu y^V = 0,$$

и так как все производные нечетного порядка в начале координат обращаются в нуль, то это уравнение удовлетворяется тождественно, и (2') имеет с цепной линией прикосновение пятого порядка. Это эллипс, центр которого лежит в точке  $(0, 3a)$ , величины полуосей  $a\sqrt{3}$  и  $3a$ .

Как уже упомянуто выше, в технических приложениях по Д'Оканю утилизируемая дуга не превышает дуги, конец которой имеет абсциссу  $0,4a$ . Для этого значения  $x$  избыток ординаты соприкасающегося эллипса (2') над ординатой цепной линии всего

$$0,000023a.$$

Если  $a = 20$  м, стало быть, хорда  $CB = 16$  м — наибольшее отклонение ординаты эллипса от соответствующей ординаты цепной линии  $0,46$  мм (менее  $\frac{1}{2}$  мм), — величина, как выражается Д'Окань, „strictement négligeable“ (безусловно не заслуживающая внимания) в сравнении с 20 и даже с 16 м.





т. е. в двух окружностях углы, опирающиеся на одну хорду  $OO_1$ , равны, а потому и сами окружности равны и

$$O_1E = O_1F,$$

а потому и

$$EO = FO.$$

2. Решение средствами проективной геометрии. Соединив точки  $A$  и  $D$  с точками  $G$  и  $K$ , получим два пучка с центрами в  $A$  и  $D$ . Эти два пучка конгруэнтны, ибо углы между соответственными их прямыми — углы вписанные, опирающиеся на одни и те же дуги окружности. Следовательно, ангармоническое отношение четырех прямых пучка  $A$  равно ангармоническому отношению четырех соответственных прямых пучка  $D$ . А потому, по теореме Паппа, равны и ангармонические отношения четырех соответственных точек пересечения прямой  $GK$  с каждым из этих пучков, т. е.

$$(OGKE) = (FGKO)$$

или

$$\frac{OK \cdot GE}{GK \cdot OE} = \frac{FK \cdot GO}{GK \cdot FO}.$$

Но, по условию,  $OK = GO$ ; поэтому

$$\frac{GE}{OE} = \frac{FK}{FO},$$

или

$$\frac{GO - OE}{OE} = \frac{OK - FO}{FO}.$$

Это дает

$$\frac{GO}{OE} = \frac{OK}{FO},$$

или

$$OE = FO,$$

что и требовалось доказать.

П. А. Соловьев.

3. Решение методами аналитической геометрии. Пусть уравнения прямых  $DC$  и  $AB$  (фиг. 1) будут:

$$y = mx \quad (m = \operatorname{tg} \alpha); \quad (1)$$

$$y = nx \quad (n = \operatorname{tg} \beta). \quad (2)$$

Уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \quad (a = OO_1). \quad (3)$$

Абсциссы точек  $C$ ,  $D$  определяются из уравнения

$$x^2 - 2ax \cos^2 \alpha + (a^2 - r^2) \cos^2 \alpha = 0, \quad (4)$$

Пусть будет:  $C \equiv (x_1, y_1), D \equiv (x_2, y_2)$ . Абсциссы точек  $A, B$  определяются из уравнения

$$x^2 - 2ax \cos^2 \beta + (a^2 - r^2) \cos^2 \beta = 0, \quad (5)$$

$A \equiv (x_3, y_3), B \equiv (x_4, y_4)$ .  $AC$  делает на  $OK$  отрезок

$$OF = \frac{x_1 y_3 - y_1 x_3}{x_1 - x_3};$$

$BD$  делает на  $OG$  отрезок

$$OE = \frac{x_2 y_4 - y_2 x_4}{x_2 - x_4}.$$

Таким образом в силу (1) и (2)

$$OF = \frac{x_1 x_3 (n - m)}{x_1 - x_3}, \quad OE = -\frac{x_2 x_4 (n - m)}{x_2 - x_4};$$

$$OF - OE = (n - m) \frac{x_1 x_3 (x_2 - x_4) + x_2 x_4 (x_1 - x_3)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Числитель можно переписать так:

$$Z = -(x_1 + x_2)x_3x_4 + x_1x_2(x_3 + x_4),$$

но по (4)  $x_1 + x_2 = 2a \cos^2 \alpha, \quad x_1 x_2 = (a^2 - r^2) \cos^2 \alpha,$

по (5)  $x_3 + x_4 = 2a \cos^2 \beta, \quad x_3 x_4 = (a^2 - r^2) \cos^2 \beta,$

поэтому  $Z = 0$  и, следовательно,  $OE = OF$ .

Д. М. Синцов.

4. Тригонометрическое решение. Обозначим длину хорды  $GK$  через  $2a$  (фиг. 2). Имеем:

$$AF \cdot FC = a^2 - x^2, \quad (a)$$

где  $x = OF$ . Из треугольника  $AFO$  имеем:

$$\frac{AF}{\sin \beta} = \frac{x}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Из треугольника  $OCF$  имеем:

$$\frac{FC}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin \gamma}.$$

Перемножая почленно эти два равенства, получим:

$$\frac{AF \cdot FC}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{x^2}{\sin \gamma \cdot \sin (\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Подставив в (a) вместо  $AF \cdot FC$  его значение, полученное из последнего равенства, будем иметь:

$$\frac{x^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma \cdot \sin (\alpha + \beta + \gamma)} = a^2 - x^2.$$

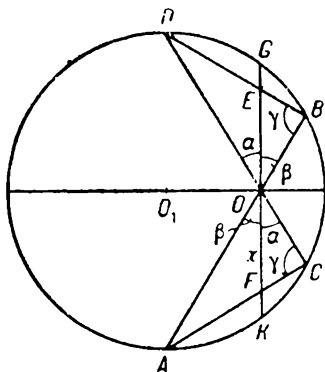
Подобным же образом для  $y = OE$  получим:

$$\frac{y^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma \cdot \sin (\alpha + \beta + \gamma)} = a^2 - y^2,$$

откуда

$$x = y.$$

И. М. Дармоустук.



Фиг. 2.

# ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

И. А. Ш о р о х о в (Иваново)

1. Имеем уравнение:

$$z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0. \quad (1)$$

Полагая  $z = y - \frac{p}{4}$ , приводим его к виду:

$$y^4 + Ay^2 + By + C = 0, \quad (2)$$

где

$$A = -\frac{3}{8}p^2 + q; \quad B = \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{2}pq + r;$$

$$C = -\frac{3}{256}p^4 + \frac{1}{16}p^2q - \frac{1}{4}rp + s.$$

2. Полагая  $A = 1 + 2a$ ,  $B = -2b$ ,  $C = a^2 + b^2 - R^2$ , преобразуем уравнение (2) к виду:

$$(y^2 + a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0.$$

Положив  $y^2 = -x$ , получим следующих два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= R^2, \\ y^2 &= -x, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$a = \frac{A-1}{2} = \frac{-3p^2 + 8q - 8}{16},$$

$$b = -\frac{B}{2} = \frac{-p^3 + 4pq - 8r}{16},$$

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{(A-1)^2 + B^2}{4} - C = \frac{(A-1)^2 + B^2 - 4C}{4} = \\ &= \frac{(3p^2 + 8q - 8)^2}{256} + \frac{(-p^3 + 4pq - 8r)^2}{256} - \\ &\quad - \left( -\frac{3}{256}p^4 + \frac{1}{16}p^2q - \frac{1}{4}pr + s \right). \end{aligned}$$

Таким образом решение уравнения (2) сводится к нахождению точек пересечения параболы и окружности (ординаты точек пересечения будут служить корнями уравнения). Так как уравнение параболы не зависит от коэффициентов данного уравнения (2), то она при решении этой задачи будет постоянной и может быть вычерчена раз навсегда. Следовательно, уравнение четвертой степени может быть решено путем пересечения окружности с постоянной параболой.

3. Все корни уравнения (2) мнимы, если  $R^2 = a^2 + b^2 - C < 0$  т. е. если  $\frac{(A-1)^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C < 0$ , или  $(A-1)^2 + B^2 < 4C$ .

При условии  $(A-1)^2 + B^2 > 4C$  все корни уравнения (2) будут мнимыми, если  $R$  меньше кратчайшего расстояния центра окружности от параболы.

## О ПОВЫШЕНИИ СТЕПЕНИ ТАБУЛИРУЕМОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ТАБЛИЦ ЛОГАРИФМОВ

П. П. Андреев (Москва)

Стремление всех составителей таблиц вычислительного характера сводится к тому, чтобы: 1) дать возможно большее число значений независимых переменных и соответствующих им значений функций; 2) расположить табличный материал так, чтобы пользование им было возможно более простым; 3) так подобрать независимые переменные и разбить числовые значения функции на такие части, чтобы, комбинируя те и другие между собой, разместить данный материал в наименьшем объеме, т. е. повысить степень табулируемости.

В большинстве случаев увлечение одним из перечисленных пунктов делает таблицы, составленные иногда в высшей степени остроумно, практически мало пригодными.

Примерами таких практически мало удобных таблиц могут служить таблицы произведений двух чисел: 1) *Crelle, Erleichterungs-Tafel*, Berlin 1836 и *Laundy, A Table of Products*, London 1865, в которых на одной странице помещается 100 000 произведений; здесь увлечение повышением степени табулируемости слишком усложнило способ пользования ими; 2) Дьяков, Таблицы умножения, Петербург 1897 г. — наиболее простые таблицы по расположению материала, но громоздкие по объему (1000 стр.); 3) Нейшулер, Таблицы умножения многозначных чисел, Новочеркасск 1930 г. и те же таблицы под названием „Таблицы для расчетов при авансировании и окончательном распределении доходов в колхозах“, Москва 1933 г., построенные по образцу таблиц *Riem's Rechentabellen für Multiplication*, — слишком сложные для умножения многозначных чисел.

Примером наиболее удачного сочетания всех требований, предъявляемых к вычислительным таблицам, могут служить таблицы: *L. Zimmernann, Rechen-Tafeln, kleine Ausgabe*, Liebenwerda, 1895 и *Rechen-Tafeln, grosse Ausgabe*, 1896 (первые издания); и те и другие таблицы выдержали по нескольку изданий. При построении таблиц логарифмов к повышению степени табулируемости стремятся главным образом в таблицах с большим числом знаков. Примерами подобных таблиц могут служить: *Peter Gray, Tables for the Formation of Logarithms and Antilogarithms to Twenty-Four or any less number of Places*, London 1900, описание которых на русском языке дано проф. Н. С. Лунским в 1917 г., „Вычисления по сокращенным таблицам многозначных логарифмов Gray'я“, Москва, отдельный стиск из „Известий Коммерческого института“ и „Таблицы десятизначных логарифмов чисел от 1000 до 10 000“ Б. В. Нумерова, ГТТИ, 1932 г.

Есть попытки посредством увеличения интервалов между двумя последовательными числами уменьшить объем пятизначных таблиц логарифмов. Практически это осуществлено в таблицах *Brauer, Springende Logarithmen*, Karlsruhe 1901.

Таблицы эти занимают 8 страниц, т. е. составляют приблизительно  $\frac{1}{3}$  обычного объема.

Табличную разность между логарифмами можно вычислить по формуле:

$$\ln x - \ln x_0 = 2 \left[ \frac{x - x_0}{x + x_0} + \frac{1}{3} \left( \frac{x - x_0}{x + x_0} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x - x_0}{x + x_0} \right)^5 + \dots \right],$$

или, для десятичных логарифмов:

$$\lg x - \lg x_0 = 2 \left[ M \frac{x - x_0}{x + x_0} + \frac{M}{3} \left( \frac{x - x_0}{x + x_0} \right)^3 + \frac{M}{5} \left( \frac{x - x_0}{x + x_0} \right)^5 + \dots \right].$$

Для пятизначных таблиц логарифмов  $x$  и  $x_0$  числа четырехзначные.

Берем в правой части только первый член и получаем:

$$\Delta = \lg x - \lg x_0 \approx 2M \frac{x - x_0}{x + x_0},$$

где  $\Delta$ —табличная разность.

Положим

$$x = 1001 \quad \text{и} \quad x_0 = 1000,$$

тогда

$$\Delta \approx 2 \cdot 0,43429 \cdot \frac{1}{2001} \approx 0,00043.$$

Эта разность будет наибольшей для четырехзначных чисел при интервале между числами в единицу.

Поставим перед собой обратную задачу: определить интервалы между двумя последовательными числами при условии сохранения более или менее постоянной табличной разности.

Возьмем равенство

$$\Delta = M [\ln x - \ln x_0] = M \ln \frac{x}{x_0} = M \ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right).$$

Разложим  $\ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)$  в ряд Маклорена и получим:

$$\ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right) = \frac{x - x_0}{x_0} - \frac{1}{2} \left( \frac{x - x_0}{x_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{x - x_0}{x_0} \right)^3 - \dots$$

Чтобы возможно было прибегать к линейному интерполированию,  $\Delta$  должно быть, в пределах данной точности, пропорционально разности  $x - x_0$ , т. е.

$$\Delta = M \frac{x - x_0}{x_0}.$$

Определим значения  $x - x_0$  при условии, что  $\Delta = 0,00043$ , а  $x_0$  принимает значения от 2000 до 9000.

Имеем:

$$0,00043 = 0,43429 \frac{x - x_0}{2000},$$

откуда

$$x - x_0 = 2.$$

Итак, для чисел, начиная с 2000, интервал может быть равен 2.

Точно так же получим:

для чисел от 3 000	разность $x - x_0 = 3$ ,
" " " 4 000	" $x - x_0 = 4$ ,
" " " 5 000	" $x - x_0 = 5$ ,
. . . . .	
для чисел от 9 000	" $x - x_0 = 9$ .

С такими интервалами между двумя последовательными числами и построены вышеуказанные таблицы Брауера.

При составлении 24-значных таблиц логарифмов Грейем был использован несколько измененный прием, который указал Бригг в своей „Arithmetica logarithmica“ (1624 г.). Бригг в качестве одного из приемов при составлении таблиц логарифмов пользовался следующим. Всякую дробь можно представить в виде

$$N = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots;$$

вынесем  $a_0$  за скобки, получим:

$$N = a_0 \left( 1 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots \right).$$

Из второго сомножителя первой части этого равенства вынесем  $1 + \frac{b_1}{10}$  за скобки, тогда

$$N = a_0 \left( 1 + \frac{b_1}{10} \right) \left( 1 + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \dots \right).$$

Легко доказать, что в третьем сомножителе десятых долей нет; поступая так же и дальше, получим:

$$N = a_0 \left( 1 + \frac{b_1}{10} \right) \left( 1 + \frac{c_2}{10^2} \right) \left( 1 + \frac{d_3}{10^3} \right) \dots,$$

откуда

$$\lg N = \lg a_0 + \lg \left( 1 + \frac{b_1}{10} \right) + \lg \left( 1 + \frac{c_2}{10^2} \right) + \lg \left( 1 + \frac{d_3}{10^3} \right) + \dots$$

Имея логарифмы ограниченного круга чисел  $1; 2; \dots; 9; 0,1; \dots; 0,9; 0,01; \dots; 0,09; 0,001; \dots; 0,009; \dots$ , можно находить логарифмы любых чисел. В 24-значных таблицах Грейя этот принцип дополнен тем, что всякое число можно преобразовать в новое, начинающееся с единицы, умножением или делением на однозначное число. Материал этих таблиц расположен на 39 страницах. Каждая страница состоит из шести столбцов; в первом — помещены числа  $n$ , начиная от 1000; в остальных пяти — логарифмы:

- в I  $\lg (1 + 0,001 n)$ ;
- „ II  $\lg (1 + 0,001^2 n)$ ;
- „ III  $\lg (1 + 0,001^3 n)$ ;
- „ IV  $\lg (1 + 0,001^4 n)$ ;
- „ V  $\lg (1 + 0,001^5 n)$ .

Кроме того, помещена еще таблица логарифмов и колога-рифмов однозначных чисел. Этой вспомогательной таблицей пользуются в зависимости от того, что сделано с числом для преобразования его в новое, начинающееся с единицы. Числа в таблицах даны от 1000 до 1999.

В таблицах Нумерова  $\lg x$  составляется из трех слагаемых:  $\lg x_0$ ,  $M_{x_0}^h$  и  $-\alpha$ , где  $\lg x_0$  есть логарифм табличного числа,  $h = x - x_0$  и

$$\alpha = \left[ \frac{1}{2M} (hf)^2 - \frac{1}{3M^2} (hf)^3 + \dots \right],$$

где

$$f = \frac{M}{x_0}.$$

Получено это разложением  $\lg x$  в ряд Тейлора:

$$\ln x = \ln x_0 + h \frac{1}{x_0} - \frac{h^2}{2} \frac{1}{x_0^2} + \frac{h^3}{3} \frac{1}{x_0^3} - \dots,$$

или

$$\lg x = \lg x_0 + hf - \left[ \frac{1}{2M} (hf)^2 - \frac{1}{3M^2} (hf)^3 + \dots \right],$$

откуда

$$\lg x = \lg x_0 + hf - \alpha.$$

В таблице даны готовые значения  $f$  и  $\alpha$ ; произведение  $hf$  надо находить или при помощи арифмометра или по семи, восьмизначным логарифмам. Числа даны в таблицах от 1000 до 9999. Таблицы расположены на 189 страницах.

Мощным средством к повышению табулируемости таблиц логарифмов мог бы служить еще более упрощенный прием, чем примененный Греем. Всякое число можно преобразовать в новое, начинающееся с единицы, или делением на 2, или умножением на 3 или на 2. Исходя из этого, достаточно в таблицах дать лишь логарифмы чисел, начинающиеся с единицы, и поместить в начале каждой страницы  $\lg 2$ ,  $\text{colg } 3$  и  $\text{colg } 2$ . В этом случае четырехзначные таблицы логарифмов состояли бы всего из 10 строк, пятизначные таблицы логарифмов можно было бы поместить на одном развороте, объем десятизначных таблиц Нумерова сократить со 198 до 29 страниц.

Отыскание логарифма по четырехзначным таблицам логарифмов имело бы в таком случае вид:

$\lg 2 = 0,3010$	$\text{colg } 3 = 1,5229$	$\text{colg } 2 = 1,1990$
Найти $\lg 2764$	Найти $\lg 4381$	Найти $\lg 6185$
$\lg 1382 = 3,1405$	$\lg 13143 = 4,1187$	$\lg 12372 = 4,0924$
$\lg 2 = 0,3010$	$\text{colg } 3 = 1,5229$	$\text{colg } 2 = 1,1990$
$\lg 2764 = 3,4415$	$\lg 4381 = 3,6116$	$\lg 6186 = 3,7914$



ОЧЕРК ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В ЯПОНИИ <sup>1)</sup>

В. В. Горячкин (г. Орджоникидзе)

## I

Мы не имеем никаких данных о состоянии математических знаний в Японии до VI столетия. В VI столетии, после проникновения в страну буддизма, обрывки математических знаний проникли в Японию из Китая через Корею. Эти сведения были очень ограничены, так как в то время европейские миссионеры еще не появлялись в Китае; но даже и эти скудные начатки знаний мало-помалу вследствие неблагоприятных политических условий были сведены на-нет.

В начале и в середине XVII столетия в Японию опять проникают китайские трактаты и вместе с ними китайские методы, равно как и китайский абак „суан пан“, или по-японски „соробан“. Арифметика на соробане изучалась в Японии повсеместно. В Киото ее преподавал Мори Камбен. Все вышедшие после этого японские трактаты являются усовершенствованием этих методов, и все они базируются на старом китайском трактате середины XVI столетия, переизданном в Японии в XVII столетии. Соробан становится популярным в старой Японии.

Наряду с этим под влиянием другого китайского трактата XVI столетия среди математиков в Японии начинает играть роль инструментальная алгебра, в которой все операции производятся при помощи счетных каменных пластинок, или *sangi*. Такая алгебра у китайцев носила название метода небесного элемента, и то же самое название было сохранено и в Японии.

С этих пор соробан становится достоянием масс, удовлетворяя практическим потребностям населения, а методом *sangi* пользуются лишь немногие „избранные“, т. е. математики, при решении сложных задач теоретического характера. Так, например, этим методом решались численные уравнения *любой* степени. Вместе с этим для японских математиков начинается период самостоятельных исследований, и интенсивность математической мысли становится такой, что в кратких словах нельзя перечислить достижений XVIII и первой половины XIX столетия.

<sup>1)</sup> Источники: 1) Joshio Mikami, The developement of math. in China, Japan; 2) A history of joponese mathem. D. E. Smith, Mikami; 3) Mathem papers Mikami.

В 1642 г. родился „японский Ньютон“ Секи-Кова. Он писал очень много, но немногие из его сочинений увидели свет в печати. Он ввел обычай публикации задач и затем публикации их решений. Между прочим, в это время занимались решением уравнений очень высоких степеней. Например, в связи с решением одной задачи, предложенной Секи-Кова, было разрешено уравнение 1458-й степени. (Численные уравнения обыкновенно решались при помощи счетных пластинок *sangi*.)

За этот период совершенствуются методы инструментальной алгебры и, кроме того, возникает „новая алгебра“, в которой все предварительные операции, предшествующие составлению уравнения, производятся уже письменно, и только полученное уравнение разрешается механически при помощи *sangi*. Таким образом разрабатываются вопросы из теории уравнений, возникает неопределенный анализ, и геометрические вопросы разрешаются аналитическим методом при помощи алгебры. Интересно отметить, что Секи-Кова вводит детерминанты при решении систем уравнений и изобретает метод неопределенных коэффициентов.

В течение всего этого времени Япония, повидимому, ничего не получила из Европы. Правда, в начале XVIII столетия в Японию проникают логарифмы и тригонометрия, но лишь в виде китайских сочинений, и, кроме того, почти до начала и даже до половины XIX столетия японцы совершенно пренебрегали логарифмами и не применяли их нигде.

Величайшим достижением японской математики является изобретение метода *senri*, или так называемой круговой теории. Эта теория возникла, когда японские математики применили алгебраический анализ к решению вопроса об измерении круга.

Исследования чисто геометрического характера у ученых этого периода отсутствуют совершенно. Японские геометры старой школы, рассматривавшие лишь цилиндрические сечения, совершенно не знали параболы и гиперболы, хотя эллипс, овалы, циклоида, эллипсоида, цепная линия занимали их внимание и были им хорошо знакомы. Эвклид проник в Японию в начале XVIII столетия, но не имел никакого влияния.

В начале XVIII столетия „круговая теория“ получает значительные упрощения и усовершенствования. Ажима Чокуйен, усовершенствовавший эту теорию, решает вопрос о двух цилиндрах (круговых и притом *разных* диаметров), из которых второй цилиндр пересекает первый. Он вычисляет объем, заключенный между поверхностями пересекающихся цилиндров.

Вслед за этим ряд талантливых ученых решает ряд весьма трудных задач. Вычисляются длина дуги эллипса, объем и поверхность эллипсоида, изучаются кривая пересечения упомянутых выше цилиндров и кривые пересечения разных коноидов плоскостями, изучается цепная линия. Между тем, Вада Неи осуществляет дальнейшее усовершенствование круговой теории, и это ему приписывают построение первых интегрирующих таблиц, сыгравших такую большую роль при решении упомянутых выше вопросов.

За все это время с Запада японцы не воспользовались ничем или почти ничем. Только в середине XIX столетия они заимствовали от датчан геометрический метод решения задачи об определении центра тяжести, но затем решали те же вопросы своим круговым методом. Но с 1863 г. проникает в Японию современный анализ, и влияние старых ученых, отстаивающих свой метод *уэппи*, быстро сводится на-нет.

## II

*Работы японских математиков XVII и XVIII столетий по вычислению объема и поверхности шара.*

Японские математики XVII столетия брали шар с диаметром, равным единице, и делили его параллельными плоскостями на ряд элементарных объемов одинаковой толщины. Объем каждого элементарного слоя при вычислении они заменяли полусуммой объемов двух цилиндров, построенных на его основаниях и с высотой, равной толщине слоя. Затем все эти объемы складывались, причем полученные числовые результаты у разных вычислителей различались в зависимости от числа делений и от взятого значения числа  $\pi$ .

Одним из первых, в 1639 г., Имамура в своем трактате получил для искомого объема 0,51, а Йошида (1627 г.) в новом издании сочинения получил 0,5625.

Затем в дальнейшем были получены более точные результаты: в 1664 г. Нозава и в 1684 г. Изомура получили для объема шара первый 0,523 и второй — 0,5236.

Миками воспроизводит ход рассуждений Изомуры при вычислении  $v$ :

„Если шар с диаметром, равным одному футу, мы разрежем на 10 000 слоев, то толщина каждого слоя будет 0,0001 фута, а это будет все равно, что толщина очень тонкого бумажного листа. Вычисляя указанным способом каждый объем и складывая полученные в результате 10 000 чисел, мы получаем 523,6 мер“. (Здесь за меру принимается 0,001 фута.) „Кроме этого, — прибавляет автор, — в действительности есть еще малые (неудобные для измерения) части, которыми мы пренебрегаем“. Изомура и его современники, получивши числовой результат, не задавались вопросом об использовании полученного ответа для выяснения зависимости между объемом и диаметром шара. Вычислив каждый элементарный объем в отдельности, они просто сложили эти объемы, для чего понадобилась продолжительная и кропотливая механическая работа, и этим заканчивалось все их решение.

В 1712 г. Отака издал сочинение, в котором собраны были посмертные сочинения Секи-Кова. Там есть целая глава, посвященная вопросу о вычислении шарового объема. Сек.т идет при решении вопроса тем же путем, как и его предшественники, но в технике вычислений и в стремлении использовать полученный результат для дальнейших целей есть нечто иное. Секи сперва

делит шар на 50 равных слоев и после суммирования и вынесения за скобку множителя  $\frac{1}{4}\pi$  получает в скобке

$$a = 0,664.$$

Разделив затем шар на 100 и 200 слоев и повторив суммирование, он получает для той же величины значения

$$b = 0,6666$$

и

$$c = 0,66665.$$

Тогда с помощью полученных трех результатов Секи получает исправленный результат в виде

$$\frac{4v}{\pi} = \frac{(b-a) \cdot (c-b)}{(b-a) - (c-b)} + b.$$

После вычислений окончательно получается

$$\frac{4v}{\pi} = 666 \frac{2}{3} \text{ (тысячных доли).}$$

Это число Секи умножает на  $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{355}{113}$  и получает для объема шара

$$0,523 \cdot \frac{203}{339} = \frac{355}{6 \cdot 113} = d^3 \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Здесь полученный числовой результат

$$\frac{\pi}{4} \cdot 666 \frac{2}{3}$$

Секи представляет в таком виде, что при заданном значении  $\pi$  становится *явной* зависимость между объемом шара и его диаметром. Замечательно, что он сначала доводит умножение до конца.

$$\frac{666 \frac{2}{3}}{1000} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{355}{113} = \frac{177500}{339} \text{ тысячных долей,}$$

или

$$523 \frac{203}{339} \text{ тысячных долей.}$$

Уже после этого Секи полученный результат приводит к виду

$$\frac{\pi \cdot d^3}{6},$$

причем преобразования идут, повидимому, в следующем порядке:

$$523 \frac{203}{339} \text{ тысячных долей} = \frac{177500}{339 \cdot 1000} = \frac{1775}{339 \cdot 10},$$

или по сокращении на 5:

$$\frac{355}{113 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{355}{113} \cdot \frac{1^3}{6} = \pi \cdot \frac{d^3}{6}.$$

Таким образом он подмечает закон на частном случае; этот способ сплошь и рядом применяется японскими математиками. Выше мы указали, что Секи, повторив вычисления три раза, получает исправленный результат в виде:

$$\frac{4v}{\pi} = \frac{(b-a) \cdot (c-b)}{(b-a)-(c-b)} + b.$$

Надо заметить, что не один Секи, но и другие авторы пользуются постоянно этим приемом.

В начале и в середине XVIII столетия вопрос о вычислении объема шара вступает, повидимому, в новую стадию. В период 1730—1740 гг. Матцунага написал трактат, в котором, признавая неудовлетворительными упомянутые выше решения, дает новое чисто аналитическое решение. Он делит сферу на  $n$  равных слоев и суммирует, как это делали и в Европе, вписанные цилиндры. В способе решения нет ничего нового и замечательного, но важно отметить, что при этом он приходит к выражению

$$\pi d h^2 S_1 - \pi h^3 S_2$$

и, следовательно, должен найти суммы  $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots$  и  $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$ , что он и выполняет, получив в результате

$$\frac{\pi}{6} \cdot d^3 - \frac{\pi}{6} d^3 \cdot \frac{1}{n^2},$$

а затем уже переходит к пределу.

Интересно, что в Европе до Паскаля и Ферма (1601—1665 гг.) формула для  $S_2$  была неизвестна. Ее, например, не знал и Кавальери. На востоке эта формула была известна Ариабатте и находится в одном китайском трактате, который относят к 1275 г., и в другом, относящемся к 1715 г. Поэтому можно сказать, что японцы, повидимому, не могли заимствовать этой формулы из европейских источников.

Возвращаясь к решению Матцунаги, мы видим, что он:

- 1) делит диаметр на  $n$  равных частей;
- 2) элементарный объем цилиндра представляет в виде

$$v = F(d);$$

- 3) берет  $\sum_1^n v$  и

- 4) переходит к пределу при  $n \rightarrow \infty$ .

Совокупность этих четырех операций составляет так называемый метод *уэпэ* японцев (буквально: „круговая теория“, или „правило круга“). Этот метод возник в связи с квадратурой круга и кубатурой шара, а в дальнейшем, после изобретения таблиц *йо-хуо* (таблиц, построенных для суммирования), он применялся во многих гораздо более сложных вопросах, являясь последним словом в достижениях японского анализа.

Вышеупомянутые таблицы были составлены японцем Вада Неи (1787—1840 гг.), но Миками замечает, что нельзя утверждать наверное, что именно Вада Неи первый их изобрел.

Кроме него составил таблицы еще Аида Аммеи (1747—1817 гг.).

В таблицах Вада Ней даны числовые значения для пределов выражений вида

$$\sum_{r=1}^n \frac{r^k}{n^{k+1}} \left(1 \pm \frac{r}{n}\right)^i$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Например, с помощью этих таблиц можно непосредственно получить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{r}{n^2} \left(1 - \frac{r}{n}\right) = \frac{1}{2 \cdot 3}. \quad (1)$$

Мы привели сейчас только один из многочисленных случаев. Проф. Миками приводит в своей книге целых 9 основных таблиц, в которых даны пределы многих других выражений. Например,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{r^k}{n^{k+1}} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{\frac{2k+1}{2}} \quad (2)$$

и т. п. Таким образом, например, из третьей таблицы мы сразу получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right) = \frac{2}{1 \cdot 3}. \quad (3)$$

В предыдущем примере (1) без помощи таблиц вычислявший должен был бы от суммы

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

перейти к пределу выражения

$$\left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right]$$

при  $n \rightarrow \infty$ , чтобы получить  $\frac{1}{2 \cdot 3}$ .

Возьмем еще раз выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{r}{n^2} \left(1 - \frac{r}{n}\right).$$

Пусть  $\frac{r}{n} = x$  и  $\frac{1}{n} = dx$ . Новые пределы суммирования будут  $\frac{1}{n}$  и 1. Наше выражение теперь может быть переписано в таком виде

$$\sum_{x=\frac{1}{n}}^1 (x - x^2) dx,$$

и в пределе при  $n \rightarrow \infty$  мы получим определенный интеграл:

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2 \cdot 3}.$$

В последнем примере (3) мы, очевидно, имели:

$$\int_0^1 (1 - x^2) dx.$$

Мы привели два очень простых примера. Размеры статьи не позволяют нам привести ряд других, более сложных, примеров. Но даже из немногих примеров ясно, что в таблицах *jo-hyo* даны пределы сумм, эквивалентные определенным интегралам.

*Jo-hyo* значит буквально „складывающие таблицы“. Проф. Миками дает еще название *integrating tables*, т. е. „интегрирующие таблицы“. Теперь понятно, что такое название допустимо и достаточно правильно передает сущность дела. В этих таблицах даны числовые значения нескольких определенных интегралов (начиная с эйлеровых интегралов первого рода).

Перейдем теперь к краткому описанию таблиц.

Таблицы, приведенные у Миками, — только образцы, и ими не исчерпывается все изобретение Вада Неи. Таблицы его носят названия: *to*, *sai*, *nan* и *hoku*, т. е. восток, запад, юг, север, по-английски: *East*, *West*, *South*, *North*. Сохраняя инициалы, обозначаем:

$$E = 1 - \frac{r}{n}; \quad W = 1 + \frac{r}{n}; \quad S = 1 - \frac{r^2}{n^2}; \quad N = 1 + \frac{r^2}{n^2}.$$

В этой статье мы разобрали только таблицы *E* и *S*, данные у Миками.

Возьмем теперь из книги Миками одну из таблиц в том виде, как она там дана:

	1	<i>E</i>	<i>E</i> <sup>2</sup>	<i>E</i> <sup>3</sup>	<i>E</i> <sup>4</sup>	<i>E</i> <sup>5</sup>	<i>E</i> <sup>6</sup>
1	1	1	1	1	1	1	1
<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>r</i>	1!	1!	1!	1!	1!	1!	1!
<i>n</i> <sup>2</sup>	1 · 2	2 · 3	3 · 4	4 · 5	5 · 6	6 · 7	7 · 8
<i>r</i> <sup>2</sup>	2!	2!	2!	2!	2!	2!	2!
<i>n</i> <sup>3</sup>	1 · 2 · 3	2 · 3 · 4	3 · 4 · 5	4 · 5 · 6	5 · 6 · 7	6 · 7 · 8	7 · 8 · 9
<i>r</i> <sup>3</sup>	3!	3!	3!	3!	3!	3!	3!
<i>n</i> <sup>4</sup>	1 · 2 · 3 · 4	2 · 3 · 4 · 5	3 · 4 · 5 · 6	4 · 5 · 6 · 7	5 · 6 · 7 · 8	6 · 7 · 8 · 9	7 · 8 · 9 · 10
...	...	...	...	...	...	...	...

Например, из этой таблицы прямо видно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1}^n \frac{r^3}{n^4} E^6 = \frac{3!}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}.$$

Мы пока дали ответ на вопрос, что собой представляют таблицы *jo-hyo*. Остается еще очень интересный вопрос, *каким образом* они были составлены. Но в полной мере решить этот довольно трудный вопрос представится возможным только тогда, когда под руками исследователя будет более богатый материал из истории развития метода *yenri* в старой дореформенной Японии. Кроме того, чтобы показать, как применялся этот метод в связи с пользованием таблицами Вада Неи, Аида Аммен, Хагивары и др., надо было бы выйти из рамок этой краткой статьи. Впрочем, отчасти ответ на этот или даже на эти два вопроса мы получим, вернувшись к вопросу о вычислении японскими математиками шарового объема.

После Матцунаги и его учеников этим вопросом занялся Вада Неи. Он делит полушар на  $n$  слоев и для элементарного объема цилиндра, кроме того еще удвоенного, получает

$$\left(d^2 - \frac{r^2 d^2}{n^2}\right) \frac{d}{n} \cdot \frac{\pi}{4},$$

или

$$\frac{\pi d^3}{4} \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right).$$

Сумма двойных элементарных объемов, взятая в пределе при  $n \rightarrow \infty$ , составит объем шара, который будет

$$\frac{\pi d^3}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right),$$

но  $1 - \frac{r^2}{n^2} = S$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1}^n \frac{1}{n} \cdot S$  получается прямо из первой строки таблицы  $S$ .

Он равен

$$\frac{2}{1 \cdot 3},$$

и искомый объем будет

$$\frac{\pi d^3}{6}.$$

	1	S	S <sup>2</sup>	S <sup>3</sup>
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1 \cdot 3}$	$\frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5}$	$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$

На этом примере косвенно получается ответ и на вопрос, *каким образом* составлялись эти таблицы.

$$\sum_{1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)$$



есть в сущности

$$\frac{\overbrace{1+1+\dots+1}^{n \text{ раз}}}{n} = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3},$$

или

$$1 = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}.$$

Следовательно, для составления таблицы нужно было знать сумму  $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$  для  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Мы уже видели, что еще Матцунага знал суммы  $S_0, S_1, S_2$ , и знаем почти наверно, что они были получены не из европейских источников.

Мы видим, что Вада Неи знал числовые значения  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{r^k}{n^{k+1}}$

для  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  по крайней мере.

Деля  $S_0, S_1, \dots$  на  $n, n^2, \dots$  и переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , он имел:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots$$

Сделав затем обобщение (что весьма вероятно для японского математика), он легко мог получить, подобно Кавальери:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{r^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Пользуясь этой формулой и, кроме того, еще двумя другими основными формулами, заключающимися в равенстве

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{n=t} \frac{r^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1},$$

где  $k$ , хотя бы и большое, но конечное число, Вада Неи строил первые свои таблицы. Надо полагать, что при этом он, как и все японские математики того времени, широко и смело делал обобщения, руководясь интуицией.

Конечно, все сказанное выше не дает исчерпывающего ответа на вопрос, как именно строились таблицы, особенно там, где в результатах входят множители  $\pi$  или  $\frac{\pi}{2}$ , но это вопрос сложный, связанный со многими другими серьезными вопросами, и разрешение его требует специального исследования.

Несомненно, что интегрирующие таблицы, столь подвинувшие вперед так называемую „круговую теорию“, или „метод *yenri*“, были составлены не сразу. Сперва при помощи этих таблиц и метода *yenri* решались сравнительно простые вопросы. Только с усовершенствованием метода можно было перейти к решению более сложных задач, как, например, к вычислению поверхности

эллипсоида (вычислил Ширази Чошу в 1826 г.) или к изучению сечений кругового и эллиптического коноида и к кубатуре отдельных его частей и т. п. (трактат Хазегавы, опубликованный в 1844 г.).

Мы увидим сейчас, что при вычислении шаровой поверхности японские математики шли несколько иным путем.

Природа вопроса была такова, что вычислители предпочитали не пользоваться методом *уепри*. Мы вкратце укажем главнейшие этапы, пройденные японскими учеными при решении этого вопроса. В 1639 г. Имамура Чишо в своем трактате утверждал, что поверхность шара составляет „четверть квадрата окружности большого круга“. Через 21 год после этого Изомура в своем трактате дал то же самое правило. Еще через 24 года, в 1684 г., Изомура утверждал то же самое, признавая, впрочем, что приводимая им формула неправильна. Наряду с этим он отметил, что семь математиков, несмотря на все усилия, до сих пор не смогли получить правильной формулы для вычисления поверхности шара. При этом он предложил свое собственное решение.

Он вычисляет объемы двух шаров, диаметры которых равны 10 и 10,0002. Все вычисления Изомура производил полностью. При вычислении он пользуется своим вторым значением  $\pi$ , опубликованным им в 1684 г.:  $\pi = 3,1416$ , и получает для объемов взятых шаров 523,6 и 523,6314166283241888.

Предположив, что шары расположены концентрически, он делит разность их объемов, т. е. 0,0314166283241888, на толщину концентрического слоя  $0,0002 : 2$  и получает поверхность шара, объемлющего данный шар:

$$314,16628324188... \quad (a)$$

После этого он берет два концентрических шара с диаметрами 10 и 9,9998. Он вычисляет объемы этих шаров и, наконец, объем концентрического слоя, который затем делит на его толщину, равную 0,0001, и получает для поверхности объемлемого шара

$$314,153716841888 \quad (b)$$

Полусумму поверхностей шаров (a) и (b) он принимает за поверхность внутреннего шара с диаметром 10. Эта поверхность будет равна:

$$314,160000041888.$$

Но Изомура тут не останавливается. Все сделанные выкладки ему нужны, чтобы получить *общую* формулу для поверхности шара, и он поступает совершенно так же, как поступал Секи-Кова при получении формулы для шарового объема.

В полученном результате он отбрасывает 0,000000041888 и за поверхность шара принимает 314,16. Это число он преобразует к виду

$$\frac{523,6 \cdot 6}{10}$$

и, затем, замечая, что объем шара равен 523,6, он говорит, что

$$S_{\text{шара}} = \frac{V_{\text{шара}} \cdot 6}{d_{\text{шара}}},$$

и отсюда получает

$$S_{\text{шара}} = \pi d^2.$$

В 1722 г. ученик Секи, Такебе Кенке, дал решение при помощи другого приема. Он брал три шара с диаметрами, равными 10,01, 10,001, 10,0000001. Поместив внутри каждого из этих шаров концентрический шар с диаметром 10 и вычислив объемы трех концентрических слоев, он делил каждый такой объем на толщину соответствующего слоя. Таким образом он получил три числа:

$$a = 314,173529344;$$

$$b = 314,162406984;$$

$$c = 314,15929677.$$

Применяя теперь „метод поправок“ (как Секи-Кова при вычислении шарового объема), для поверхности шара с диаметром 10 он получает:

$$\text{Поверхность} = b - \frac{(a-b) \cdot (b-c)}{(a-b) - (b-c)} = 314,159265359.$$

Но в трактате Отаки Кватсуно Сампо, содержащем посмертные труды Секи и датированном 1709 г., для  $\pi$  дано числовое значение, именно:

$$3,14159265359.$$

Такебе, замечая это, пишет прямо:

$$S_{\text{шара}} = \pi \cdot 10^2$$

или:

$$\pi d^2.$$

Секи Кова отнесся с неодобрением к решениям Изомуры и Такебе. Сам он принимал центр шара за вершину, а радиус шара — за высоту конуса. Объем шара он счел как бы за объем конуса. Его решение, таким образом, было следующее:

$$\frac{1}{3} (\text{поверх. шара}) \cdot (\text{радиус}) = (\text{объему конуса}).$$

Отсюда он выводит:

$$S_{\text{шара}} = \frac{3 \cdot v_{\text{шара}}}{R_{\text{шара}}}.$$

Вада Ней (умер в 1840 г.) вернулся к решению Изомуры и Такебе, но дал решение аналитическое. Взявши два шара с диаметрами  $d$  и  $d+h$ , он получил для разности их объемов

$$\frac{\pi}{6} (d+h)^3 - \frac{\pi}{6} \cdot d^3 = \frac{\pi}{6} (3d^2h + 2dh^2 + h^3).$$

В данном случае толщина стенок полого шара будет  $\frac{h}{2}$ . Поэтому, разделив объем на  $\frac{h}{2}$  получим, что поверхность слоя будет:

$$\frac{1}{3} \pi (3d^2 + 3dh + h^2).$$

Толщина  $h$  может быть как угодно малой. Поэтому получим в предельном случае:

$$\frac{1}{3} \pi \cdot 3d^2 \text{ или } \pi d^2.$$

Наконец, в 1830 г. Хазегава Кан опубликовал тот же самый способ вычисления шаровой поверхности. Он брал 2 концентрических шара с радиусами

$$\frac{d}{2} \text{ и } \frac{d}{2} - h$$

и исходил из равенства

$$S_{\text{конц. слой}} \cdot h = \frac{\pi d^3}{6} - \frac{\pi}{6} (d - 2h)^3.$$

Подобным же образом при помощи объема эллипсоида вращения японские математики определяли его поверхность.

Способ определения поверхности шара, примененный Изомурой, Такебе и Вада Ней, еще раньше был известен и применялся в Европе. Что касается решения Секи, то такое же решение в XVI столетии было дано Ганезой. Следовательно, решение Секи могло быть индусского происхождения.

Если работы японских ученых сравним с трудами Архимеда, Апполония и даже Герона, то разница между приемами тех и других при решении геометрических вопросов будет очевидна. Греки опирались на строгую систему логических доказательств. У японских математиков доказательства совершенно или почти совершенно отсутствовали. Всякий геометрический вопрос японские ученые решали при помощи алгебраического анализа, применяя свою круговую теорию или метод *уэнри*, который при наличии интегрирующих таблиц в руках вычислителей оказался довольно могущественным орудием. Часто они пользовались интуицией и очень широко и смело, можно сказать, до дерзости смело прибегали к обобщениям. Они делали ошибки, иногда исходили из ложных положений, но очень часто самая эта их смелость вознаграждалась успехом при решении труднейших вопросов. Геометрии в том виде, как ее дал Эвклид, у них не было. Даже, как утверждает Миками, китайский перевод Эвклида, сделанный в начале XVII столетия и проникший в Японию, прошел совершенно незамеченным.

Японские геометры имели в своем распоряжении различные геометрические теоремы. Они даже в некоторых отношениях опередили математиков Запада, но всегда ограничивались фор-

мулировкой своих положений и не заботились совершенно подтвердить их доказательствами.

Алгебра и анализ японцев достигли большой степени совершенства. В области неопределенного анализа, в области решения уравнений, при ректификации дуг и вычислении объемов и поверхностей они проявили выдающиеся способности и умение, и едва ли можно сомневаться в том, что если бы с 1868 г. не был, наконец, открыт доступ европейскому влиянию и если бы Япония была предоставлена самой себе, то все же в конце концов японские геометры совершенно самостоятельно пришли бы к открытию дифференциального и интегрального исчисления, имея в своем распоряжении метод *yenri*, имея таблицы *jo-hyo*, от которых до открытия Ньютона и Лейбница им оставалось сделать уже немного шагов.

Правда, понятие о дифференцировании было, повидимому, совершенно чуждо японским исследователям, хотя есть указания на то, что Секи Кова дает в одном месте правило, наводящее на мысль о дифференцировании, но на практике он им не пользуется. Может быть, его последователи пользовались им при разыскании максимальных и минимальных значений.

Последний великий математик японской старой школы, Кагивара Тейзуке, был еще жив, когда европейский анализ, проникнув в Японию, вытеснил окончательно старые методы и круговой метод *yenri*. Но не зная европейских языков и имея в своем распоряжении лишь китайский перевод старого курса анализа, он так и не вошел в круг новых идей и умер в 1909 г., твердо убежденный в превосходстве японской науки вообще и своих методов в особенности.

## ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ЭЙЛЕРА

Л. Р.

Известно, что правильное понимание формулы

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (1)$$

для учащихся втузов и техникумов оказывается особенно затруднительным. Обыкновенно эта формула воспринимается учащимся лишь механически. Действительно, чтобы довести учащегося до понимания сути дела, необходимо, следуя обычному пути, предпослать немалое количество сведений из теории рядов. Для этого не всегда, разумеется, возможно выкроить нужное время; в особенности в тех учебных заведениях, где курс математики невелик.

Можно, однако, вывести формулу Эйлера довольно просто и строго без рядов. Я приведу этот вывод, неоднократно оправдавший себя на опыте, невзирая на то, что в столь элементарном вопросе трудно ручаться за новизну<sup>1)</sup>. По возможности сохраняю стиль урока.

Вспомним известную из теории пределов формулу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

До сих пор мы считали число  $k$  действительным. Положим теперь, что  $k$  есть мнимое число, т. е.  $k = xi$  ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Естественно обозначить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{xi}{n}\right)^n = e^{xi}. \quad (2)$$

Однако будем пока что обозначение  $e^{xi}$  понимать лишь формально — только как условную запись предела, находящегося в левой части равенства.

Рассмотрим левую часть равенства (2) и постараемся ее представить в более удобном виде. Для этого рассмотрим комплексное число

$$1 + \frac{xi}{n} \quad (3)$$

---

<sup>1)</sup> Этот вывод не нов, его можно найти, например, в книге проф. Букрсева „Теория рядов“, Киев 1911. Мы помещаем этот вывод ввиду его методического значения и малой распространенности. (Прим. ред.).

и приведем его к тригонометрическому виду (фиг. 1)

$$1 + \frac{xi}{n} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad (4)$$

где

$$r = \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}} \quad (5)$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{n} \quad (6)$$

так что

$$n = \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (7)$$

Возводя обе части равенства (4) в  $n$ -ю степень и применяя для правой части равенства формулу Муавра, получим

$$\left(1 + \frac{xi}{n}\right)^n = r^n (\cos na + i \sin na). \quad (8)$$

Обозначим  $r^n = \varrho$  и  $na = \varphi$ , так что

$$\left(1 + \frac{xi}{n}\right)^n = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (9)$$

Переходя к пределу, вспомним, что для нахождения предела комплексного переменного числа достаточно найти отдельно предел модуля и аргумента. Поэтому устремим  $n$  к бесконечности и найдем предел для  $\varrho$  и для  $\varphi$ . Очевидно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1. \quad (10)$$

Переходя к разысканию предела  $\varphi$ , примем во внимание формулы (6) и (7) и заметим, что число  $x$  — постоянное, а потому если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\alpha \rightarrow 0$ . После этого без труда находим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \alpha \rightarrow 0}} na = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot x\right) = x. \quad (11)$$

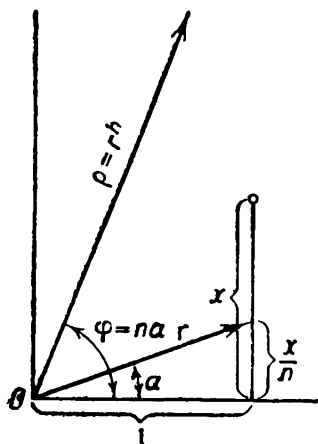
Таким образом равенство (9) в пределе примет вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{xi}{n}\right)^n = \cos x + i \sin x. \quad (12)$$

Следовательно, под символом  $e^{xi}$  надо понимать иную запись комплексного числа  $\cos x + i \sin x$ , так что

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x. \quad (13)$$

Мы получили так называемую формулу Эйлера.



Фиг. 1.

Рассмотрим теперь  $e^{(x+y)i}$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} e^{(x+y)i} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) = \\ &= (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = e^{xi} \cdot e^{yi} \end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом мы обнаружили, что то число  $xi$ , которое находится в левой части формулы (13), ведет себя совершенно так же, как обычный показатель степени, и, следовательно,  $e^{xi}$  обладает всеми свойствами степени числа  $e$ . Поэтому условимся  $e^{xi}$  называть мнимой степенью числа  $e$ , а число  $xi$  условимся называть мнимым показателем степени.

В заключение отметим, что вышеизложенная трактовка формулы Эйлера особенно уместна, если теория комплексных чисел излагается в векторно-геометрической форме.

### ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ К НАХОЖДЕНИЮ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

М. М. В а й н б е р г (Иваново)

С методической стороны данный вопрос представляет известный интерес, ибо почти во всех технических учебных заведениях излагаются приемы интегрирования указанных уравнений. Однако при решении их приходится пользоваться методом, предложенным еще Эйлером. Именно, сначала ищут частное решение однородного уравнения (без правой части) в виде показательной функции. Вопрос приводит к исследованию корней характеристического уравнения. В случае полных уравнений применяется метод Лагранжа — вариации произвольного постоянного или символический метод Бура. Оба они представляют методическую трудность при их изложении, особенно, если учесть сжатость программ технических школ. Перечисленные приемы, которые применяются к интегрированию лишь отдельных случаев указанных уравнений, помимо их громоздкости, еще довольно искусственны. Это приводит к тому, что во многих технических школах излагаются скорее правила, а не методы интегрирования этих уравнений — в их строгом изложении. Высказанное положение хорошо иллюстрируется шими учебниками (по крайней мере большинством), предназначенными для втузов.

Возникает, однако, вопрос: нельзя ли при интегрировании указанных уравнений охватить эти отдельные случаи одним методом, который до известной степени сократил бы вычислительные действия, а следовательно, и потребное время. Эту цель и преследует настоящая статья.



§ 1. Мы будем отправляться от идей интегрирующего множителя. В применении к линейным уравнениям первого порядка это, как известно, сводится к следующему. Дано уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = q(x). \quad (1)$$

Помножим его на  $Q(x)$ , что запишем кратко:

$$Qy' + pQy = qQ. \quad (2)$$

Спрашивается, нельзя ли выбрать функцию  $Q(x)$  так, чтобы левая часть равенства (2) приняла вид:

$$\frac{d}{dx}(Qy),$$

т. е. чтобы имело место следующее равенство:

$$\frac{d}{dx}(Qy) = qQ. \quad (3)$$

Раскрывая левую часть равенства (3) и сравнивая ее с левой частью равенства (2), получаем:

$$Q' = pQ.$$

Из этого равенства находим интегрирующий множитель:

$$Q = e^{\int p \, dx}.$$

Зная  $Q$ , мы непосредственно из (3) находим общий интеграл уравнения (1):

$$y = e^{-\int p \, dx} \left[ C + \int q e^{\int p \, dx} dx \right]. \quad (4)$$

Если в уравнении (1) коэффициент  $p$  не зависит от  $x$ , т. е. если имеем уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, то интегрирующим множителем его будет служить функция:

$$Q(x) = e^{ax}.$$

Последним обстоятельством мы и воспользуемся при интегрировании уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

§ 2. Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами вида:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (5)$$

Помножив его на  $e^{kx}$ , получим:

$$(y'' + a_1 y' + a_2 y) e^{kx} = f(x) e^{kx}. \quad (6)$$

Спрашивается, нельзя ли выбрать постоянную  $k$  так, чтобы левая часть равенства (6) приняла вид:

$$\frac{d}{dx}[(y' + by) e^{kx}],$$

т. е. чтобы имело место следующее равенство:

$$\frac{d}{dx}[(y' + by) e^{kx}] = f(x) e^{kx}. \quad (7)$$

Мы ставим, таким образом, вопрос о понижении порядка линейного уравнения. Поставленный вопрос получает положительный ответ, ибо если раскрыть левую часть равенства (7) и сравнить ее с левой частью равенства (6), мы получим два уравнения относительно двух неизвестных  $b$  и  $k$ . В самом деле, раскрывая левую часть равенства (7), мы получаем:

$$[y'' + (b + k)y' + bky] e^{kx} = f(x) e^{kx}, \quad (8)$$

и сравнение коэффициентов левых частей равенств (8) и (6) дает

$$b + k = a_1, \quad bk = a_2. \quad (9)$$

Исключение  $b$  из этих двух равенств приводит к рассмотрению характеристического уравнения

$$k^2 - a_1k + a_2 = 0, \quad (A)$$

которое вполне решает поставленный вопрос.

Займемся теперь исследованием корней уравнения (A).

§ 3. Если (A) имеет два действительных корня ( $k_1$  и  $k_2$ ), то равенство (7) нам непосредственно дает два уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами относительно неизвестной функции  $y$  и ее производной  $y'$ :

$$y' + b_1y = e^{-k_1x} \left[ C_1 + \int e^{k_1x} f(x) dx \right]$$

и

$$y' + b_2y = e^{-k_2x} \left[ C_2 + \int e^{k_2x} f(x) dx \right].$$

Решая их совместно относительно неизвестной функции  $y$ , получим:

$$y(b_1 - b_2) = C_1 e^{-k_1x} - C_2 e^{-k_2x} + e^{-k_1x} \int e^{k_1x} f(x) dx - e^{-k_2x} \int e^{k_2x} f(x) dx;$$

замечая теперь, что  $b_1 - b_2 = k_2 - k_1$  [из равенства (9)], и вводя новые произвольные постоянные, окончательно получим:

$$y = C_1 e^{-k_1x} + C_2 e^{-k_2x} + \frac{e^{-k_1x}}{k_2 - k_1} \int e^{k_1x} f(x) dx + \frac{e^{-k_2x}}{k_1 - k_2} \int e^{k_2x} f(x) dx. \quad (10)$$

В случае однородных уравнений, т. е. когда  $f(x) = 0$ , полученная формула (10) дает нам известный результат:

$$y = C_1 e^{-k_1x} + C_2 e^{-k_2x} {}^1).$$

Итак, если характеристическое уравнение (A) имеет два различных корня, то формула (10) дает решение дифференциального уравнения (5). Если же (A) имеет один кратный корень, то мы

<sup>1)</sup> Чтобы в последнем равенстве и во всем дальнейшем иметь перед  $k_1$  и  $k_2$  знаки плюс, достаточно в уравнении (A) изменить знак неизвестной  $k$ , т. е. писать:

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0. \quad (A')$$

из равенства (7) получим лишь одно линейное уравнение первого порядка, к которому можно применить общий прием § 1. Однако, как сейчас покажем, в этом случае вопрос получает более простое решение.

§ 4. В § 2 мы ставили вопрос о выборе  $k$ . Поставим теперь такой вопрос: нельзя ли выбрать постоянную  $k$  так, чтобы левая часть равенства (6) приняла вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} (ye^{kx}) = f(x) e^{kx},$$

т. е. чтобы имело место следующее равенство:

$$\frac{d^2}{dx^2} (ye^{kx}) = f(x) e^{kx}. \quad (11)$$

Раскрывая левую часть этого равенства, мы получаем:

$$(y'' + 2ky' + k^2y) e^{kx} = f(x) e^{kx}, \quad (12)$$

и сравнение коэффициентов левых частей равенств (12) и (6) дает

$$2k = a_1; \quad k^2 = a_2,$$

т. е. величина  $k$  должна служить кратным корнем характеристического уравнения

$$k^2 - a_1k + a_2 = 0. \quad (A)$$

Итак, если характеристическое уравнение (A) имеет один кратный корень, то мы из равенства (11) после двукратного интегрирования получим:

$$y = e^{-kx} \left[ C_1x + C_2 + \int \int e^{kx} f(x) dx dx \right]. \quad (13)$$

В случае однородных уравнений, т. е. когда  $f(x) \equiv 0$ , равенство (13) дает известный результат:

$$y = e^{-kx} (C_1x + C_2). \quad (14)$$

§ 5. Рассмотрим случай комплексных корней уравнения (A). Пусть  $k_1 = \alpha + i\beta$ , тогда  $k_2 = \alpha - i\beta$ .

Воспользуемся в этом случае тождествами Эйлера:

$$e^{\pm i\beta x} = \cos \beta x \pm i \sin \beta x.$$

Если теперь ввести другие произвольные постоянные, то формула (10) нам дает:

$$y = C_1 e^{-\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{-\alpha x} \sin \beta x -$$

$$- \frac{1}{2i\beta} e^{-\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \cdot \int e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) f(x) dx +$$

$$+ \frac{1}{2i\beta} e^{-\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \cdot \int e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) f(x) dx,$$

или окончательно:

$$y = e^{-ax} \left[ C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + \frac{1}{\beta} \sin \beta x \cdot \int e^{ax} \cos \beta x f(x) dx - \right. \\ \left. - \frac{1}{\beta} \cos \beta x \int e^{ax} \sin \beta x f(x) dx \right]. \quad (15)$$

В случае однородных уравнений, т. е. когда  $f(x) \equiv 0$ , последняя формула нам дает известный результат:

$$y = e^{-ax} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x] \dots \quad (16)$$

Таким образом нами рассмотрены все случаи и даны для них общие решения. Отметим, что формулы (10), (13) и (15) дают [для данной функции  $f(x)$ ] вид частного интеграла.

Разумеется, что указанный здесь прием для интегрирования уравнений второго порядка целиком применим к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и более высокого порядка.

---

# ЗАДАЧИ

Перестройка начальной и средней школы на основе исторических решений партии и правительства вызвала у учащейся молодежи спрос на „трудную задачу“, т. е. на такую задачу, при решении которой учащийся должен был бы проявить максимум находчивости и сообразительности. В связи с этим многие из наших читателей в своих письмах выражали желание ознакомиться с теми задачами, которые предлагаются в иностранных школах: особенный интерес замечен к задачам, предлагаемым во французской школе, так как трудность этих задач общеизвестна.

Идя навстречу желаниям наших читателей, мы посвящаем отделы задач этого и следующего сборников задачам, предлагавшимся на экзаменах для поступающих во французские высшие школы. Все они взяты нами из журналов *L'Éducation Mathématique* и *Journal de Mathématiques Élémentaires*.

Во Франции от поступающих в вузы наряду со знанием элементарной математики требуется также знание основ начертательной геометрии, аналитической геометрии и дифференциального исчисления. Задачи, предлагаемые на экзаменах, всегда оригинальны и часто связаны со смежными областями — с механикой и физикой. В ряде учебных заведений практикуются отдельные письменные испытания по арифметике, причем проверяется не счет, а понимание теоретических основ арифметики. При этом знание теории чисел не предполагается.

Задачи по алгебре нередко требуют знания основ дифференциального исчисления. „Исследовать функцию“ — обычный вопрос, предлагаемый по алгебре.

По геометрии почти отсутствуют задачи „на вычисление“. Преобладают задачи на построение, на определение геометрических мест (обычно — синтетическое нахождение огибающих). Немногочисленные задачи на вычисление, как правило, требуют применения тригонометрии, а иногда и аналитической геометрии. Все задачи требуют хорошего геометрического воображения, большого умения ориентироваться в материале и всегда связаны с подробным исследованием вопроса.

Отрицательной чертой некоторых задач является их чрезмерная громоздкость. Такие, на наш взгляд слишком громоздкие, задачи мы не включили в наш отдел. Некоторые из приводимых нами задач по этой причине сокращены. Так, в задаче 105 имелись еще пункты 3 и 4, в которых вводились дальнейшие усложнения.

В тех задачах (это касается всех отделов), в которых требуется производить вычисления с числовыми данными, числа даются „непричесанными“, так что учащийся при вычислениях должен проявить некоторую культуру счета (умение пользоваться таблицами, целесообразное округление чисел и т. д.).

От учащихся требуется большее знание фактов, чем в нашей школе. Так, например, предполагается известным круг Эйлера и теорема о том, что если две пары противоположных ребер тетраэдра взаимно ортогональны, то и ребра третьей пары взаимно ортогональны.

Все проводимые нами задачи предлагались на письменных испытаниях и курсах. На выполнение работы предоставлялось 2—4 часа. Письменные работы проводились отдельно по каждому отделу (арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия), либо давалась одна задача по алгебре и тригонометрии и одна по геометрии. Вопросы высшей математики, знание которых требуется от бакалавра, включались в задачи по элементарной математике, и лишь на устных испытаниях предлагались отдельные темы из анализа и задачи по начертательной геометрии и аналитической геометрии.

В этом сборнике приводятся задачи по арифметике и алгебре. Задачи по геометрии будут приведены в шестом сборнике.

## АРИФМЕТИКА

85. Найти такие целые и взаимно простые  $a$  и  $b$ , чтобы было:

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{8}{73}.$$

86. Найти две правильные несократимые дроби, произведение которых равно  $\frac{19}{23}$ , зная, что числителями и знаменателями этих дробей служат четыре различных числа, дающих в сумме 808.

87. Два курьера одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов  $A$  и  $B$ . Если бы первый вышел на час раньше, а второй на полчаса позже, они встретились бы на 18 минут раньше. Если бы первый вышел на полчаса позже, а второй на час раньше, то место их встречи передвинулось бы на 5600 м. Какова скорость каждого курьера?

88. Ряд последовательных вечетных чисел (начиная с 1) разобьем на группы

$$\underbrace{1}_{\text{I гр.}}, \quad \underbrace{3+5}_{\text{II гр.}}, \quad \underbrace{7+9+11}_{\text{III гр.}}, \quad \underbrace{13+15+17+19}_{\text{IV гр.}}, \dots$$

так, чтобы число членов каждой группы равнялось ее номеру.

1. Какова сумма членов группы с номером  $n$ ?

2. Пользуясь полученным результатом, найти чему равна сумма кубов  $n$  первых чисел натурального ряда.

89. 1. Доказать, что дробь  $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$  несократима, если  $a$  и  $b$  целые и взаимно простые числа.

2. П р и л о ж е н и е. Определить два числа, зная, что их общее наименьшее кратное равно 360, а сумма их квадратов равна 5409.

90. Найти дробь, равную  $\frac{399}{1064}$ , зная, что сумма ее числителя и знаменателя составляет куб целого числа.

91. Пешеход идет со скоростью 5 км в час, останавливаясь на отдых через каждые 4 км. Продолжительность каждой остановки, кроме четвертой, 10 минут. Четвертая остановка — 1 час. Какое расстояние прошел пешеход, если, отправившись в путь в 4 часа утра, он пришел на место к полудню?

92. При умножении числа 683 на трехзначный множитель получилось 56006. Этот результат явно неверен. (Почему?).

Выяснилось, что ошибка произошла от того, что последнее частное произведение (множимого 683 на цифру сотен множителя) по ошибке подписали непосредственно под предпоследним (вторым) частным произведением.

Найти множителя, зная, что цифра его сотен на 2 превосходит цифру десятков. Можно ли найти ошибку, не вычисляя истинного произведения?

93. Найти четырехзначное число вида  $aabb$ , зная, что оно — точный квадрат.

94. Рассмотрим арифметическую и геометрическую прогрессии, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Первые члены обеих прогрессий одинаковы.

2. Сумма первых двух членов арифметической прогрессии превышает сумму первых двух членов геометрической на величину, равную утроенному первому члену.

3. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна сумме первых трех членов геометрической прогрессии.

Вычислить знаменатель геометрической прогрессии.

# АЛГЕБРА И АНАЛИЗ

95. 1. Найти общий вид полинома третьей степени, дающего при делении на  $x - 1$  в остатке 3, а при делении на  $x - 2$  — в остатке 2. Какой остаток получится при делении этого полинома на произведение  $(x - 1)(x - 2)$ ?

2. Определить частный вид этого полинома, имеющий минимум, равный  $-1$  при  $x = -1$ .

Построить график этого полинома и установить центр симметрии.

96. Подобрать  $a, b$ ,  $\alpha$  так, чтобы

$$y = \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + 2 \sin x} = a + b \operatorname{tg}(x + \alpha).$$

Проверить результат. Построить график функции  $y$ .

97. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \sqrt[6]{\frac{6x^4 - 12x^3 - x + 2}{x + 2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^2 + 60}}}{\sqrt{x^3 - \sqrt{x^2 + 60}}} \right].$$

98. Посредством замены  $y = x^2 + x$  решить уравнение

$$x^6 + 3x^5 + x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 5x + 8 = 0.$$

99. Решить систему уравнений

$$\frac{a}{x - a} = \frac{b}{y - b} = \frac{c}{z - c},$$

$$ax + by + cz = d^2.$$

Рассмотреть особо частный случай:

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5, \quad d = 5\sqrt{2}.$$

100. Чему должно быть равно  $m$ , чтобы уравнения

$$2x^2 - mx + 3 = 0,$$

$$4x^2 - 4(m - 3)x + 3 = 0$$

имели общий корень?

101. В два сосуда  $A$  и  $B$  одинакового веса налита вода, причем вес сосуда  $A$  с водой составляет  $\frac{4}{5}$  веса сосуда  $B$  с водой. Если содержимое сосуда  $B$  перелить в сосуд  $A$ , то вес последнего вместе с водой превысит вес сосуда  $B$  в 8 раз. Найти вес каждого сосуда и количество воды в каждом из них, зная, что в сосуде  $B$  содержится на 50 г больше воды, нежели в сосуде  $A$ .

102. Решить систему уравнений.

$$x + y + z = a,$$

$$x - y + z = b,$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = c.$$

103. Известно, что освещенность точки обратно пропорциональна квадрату расстояния этой точки до источника света.

На прямой, соединяющей два источника света разной силы, найти наименее освещенную точку.

104. Исследовать функцию

$$y = \frac{\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 6}}{\sqrt{x}}.$$

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

26. Если остаток от деления некоторого числа на 9 есть одно из чисел 2, 3, 5, 6, 8, то это число не может быть полным квадратом.

Заметим, что

$$\begin{aligned}(9k \pm 1)^2 &= 9(9k^2 \pm 2k) + 1; & (9k \pm 3)^2 &= 9(9k^2 \pm 6k + 1); \\ (9k \pm 2)^2 &= 9(9k^2 \pm 4k) + 4; & (9k \pm 4)^2 &= 9(9k^2 \pm 8k + 1) + 7; \\ & & (9k)^2 &= 9(9k^2).\end{aligned}$$

Поэтому квадрат целого числа при делении на 9 может дать только один из четырех остатков: 0, 1, 4, 7.

Д. М. Синцов (Харьков), А. В. (Москва)

27. Если  $A$  — целое число, то сумма  $\frac{A}{6} + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3}$  есть также целое число.

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{A}{6} + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} = \frac{A(A+1)(2A+1)}{6}$$

По крайней мере один из множителей числителя (или  $A$ , или  $A+1$ ) — четный. Кроме того, один из них делится и на 3. Действительно, если  $A$  не делится на 3 и дает в остатке 1, то  $2A+1$  делится на 3; если же  $A$  при делении на 3 даст в остатке 2, то  $A+1$  делится на 3. Поэтому числитель делится на 2 и на 3, т. е. на 6, и знаменатель сокращается.

А. В. (Москва), Городов (Кадиевка), Д. М. Синцов (Харьков)

28. Если  $N$  и  $N'$  — целые числа и сумма  $N^3 + N'^3$  делится на 7, то каждое из чисел  $N$  и  $N'$  в отдельности делится на 7.

Остаток от деления  $N^3$  (или  $N'^3$ ) на 7 может быть равен (см. решение 26) 0, 1, 2, 4. Сумма двух таких остатков делится на 7 только в том случае, если они оба равны нулю.

А. В. (Москва), Д. М. Синцов (Харьков)

29. Найти четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов равна 11, а сумма квадратов этих четырех чисел равна 221.

Пусть

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad a + d = 14 \quad (1); \quad b + c = 11 \quad (2);$$

отсюда

$$(a + d)^2 + (b + c)^2 = 317,$$

т. е.

$$a^2 + d^2 + b^2 + c^2 + 2ad + 2bc = 317.$$

Но

$$ad = bc \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 221,$$

следовательно,

$$4ad = 317 - 221; \quad ad = bc = 24.$$

Сопоставляя с (1) и (2), находим

$$a = 12, \quad d = 2, \quad b = 8, \quad c = 3.$$

А. В. (Москва), Городов (Кадиевка), Д. М. Синцов (Харьков)

30. Решить неравенство  $\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} > \frac{(x+b)^2}{x^2+b^2}$ .

Отнимем по единице из обеих частей неравенства:

$$\frac{2ax}{x^2+a^2} > \frac{2bx}{x^2+b^2}, \quad \text{или} \quad \frac{x^2+a^2}{ax} < \frac{x^2+b^2}{bx}$$



После переноса всех членов в левую часть:

$$\frac{x^2 + a^2}{ax} - \frac{x^2 + b^2}{bx} < 0, \quad \text{или} \quad \frac{(b-a)(x^2 - ab)}{abx} < 0.$$

Рассмотрим параллельно два возможных случая:

$$\begin{array}{l|l} a > b, & a < b, \\ \frac{1}{a} < \frac{1}{b}; & \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0, & \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0, \\ \frac{b-a}{ab} < 0, & \frac{b-a}{ab} > 0. \end{array}$$

Поэтому

$$\frac{x^2 - ab}{x} > 0, \quad \text{Поэтому} \quad \frac{x^2 - ab}{x} < 0.$$

Если  $x > 0$ , то

$$x^2 > ab,$$

$$x > \sqrt{ab}.$$

Если  $x < 0$ , то

$$x^2 < ab,$$

$$x < -\sqrt{ab}.$$

Если  $x > 0$ , то

$$x^2 < ab,$$

$$x < \sqrt{ab}.$$

Если  $x < 0$ , то

$$x^2 > ab,$$

$$x < -\sqrt{ab}.$$

31. Внутренняя и внешняя общие касательные к двум окружностям равны  $a$  и  $b$ . Определить длину общей касательной после того, как окружности сближены до соприкосновения.

Пусть  $R$  и  $r$  — радиусы этих двух окружностей. Квадрат расстояния между центрами равен, с одной стороны:  $b^2 - (R - r)^2$ , а с другой:  $a^2 - (R + r)^2$ . Следовательно,  $a^2 - (R + r)^2 = b^2 - (R - r)^2$ . Отсюда  $a^2 - b^2 = 4Rr$ . После сближения расстояние между центрами равно  $R + r$ , и, следовательно, квадрат общей касательной будет  $b'^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr = b^2 - a^2$ . Отсюда

$$b' = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Городов (Кадиевка)

32. Если три диагонали вписанного шестиугольника служат диаметрами описанного круга, то площадь этого шестиугольника равна удвоенной площади треугольника, имеющего своими сторонами какие-нибудь три из остальных диагоналей этого шестиугольника.

Заметим, что пл.  $DOB$  = пл.  $ODE$  = пл.  $OAB$ ; пл.  $DOF$  = пл.  $OCD$  = пл.  $OFA$ ; пл.  $BOF$  = пл.  $OBC$  = пл.  $OEF$ , (так как каждая пара соответствующих треугольников имеет равные основания и совпадающие высоты). Отсюда:  $2$  (пл.  $OBD$  + пл.  $ODF$  + пл.  $OBF$ ) = пл.  $OAB$  + пл.  $OBC$  + пл.  $OCD$  + пл.  $ODE$  + пл.  $OEF$  + пл.  $OFA$ , или  $2$  пл.  $BDF$  = пл.  $ABCDEF$ .

33. Доказать, что для всякого треугольника

$$Ra \sqrt{4R^2 - a^2} + Rb \sqrt{4R^2 - b^2} + Rc \sqrt{4R^2 - c^2} = abc, \quad (1)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — стороны треугольника, а  $R$  — радиус описанного круга.

Левая часть равенства (1) после подстановки  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$  принимает вид:

$$\begin{aligned} 4R^3 (\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C) &= 2R^3 (2 \sin A \cos A + \\ &+ \sin 2B + \sin 2C) = 2R^3 [2 \sin A \cos A + 2 \sin (B + C) \cos (B - C)] = \\ &= 4R^3 \sin A [\cos (B - C) - \cos (B + C)] = 8R^3 \sin A \sin B \sin C = abc. \end{aligned}$$

А. В. (Москва), Г о р о д о в (Калиевка)

34. Трехгранная пирамида имеет прямой трехгранный угол при вершине  $O$ , причем  $OA = OB = 12$  см,  $OC = x$ . Вычислить  $x$  при условии, что радиус сферы, вписанной в тетраэдр  $OABC$ , равен 3 см.

Вычислить при этом же условии площадь треугольника  $ABC$  и расстояние от точки  $O$  до плоскости  $ABC$ .

Объем рассматриваемой пирамиды равен

$$v = \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = 24x.$$

С другой стороны, объем этой пирамиды можно рассматривать как сумму четырех пирамид, общей вершиной которых служит центр вписанной сферы, а основаниями — грани основной пирамиды. Их объемы:

$$v_1 = \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot r = 72;$$

$$v_2 = \frac{1}{6} \cdot OB \cdot OC \cdot r = 6x;$$

$$v_3 = \frac{1}{6} \cdot OC \cdot OA \cdot r = 6x.$$

Для того чтобы выразить объем четвертой пирамиды, заметим предварительно, что

$$\text{пл. } AOB = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 72;$$

$$\text{пл. } BOC = \frac{1}{2} OB \cdot OC = 6x;$$

$$\text{пл. } COA = \frac{1}{2} OC \cdot OA = 6x.$$

Теперь:

$$(\text{пл. } ABC)^2 = (\text{пл. } AOB)^2 + (\text{пл. } BOC)^2 + (\text{пл. } COA)^2 = 5182 + 72x^2,$$

$$\text{пл. } ABC = 6\sqrt{144 + 2x^2}.$$

Поэтому объем четвертой пирамиды будет:

$$v_4 = \frac{1}{3} r \cdot \text{пл. } ABC = 6\sqrt{144 + 2x^2}.$$

Так как  $v = v_1 + v_2 + v_3$ , то

$$24x = 72 + 6x + 6x + 6\sqrt{144 + 2x^2}.$$

Отсюда

$$x = 24; \quad v = 24x = 576; \quad \text{пл. } ABC = 6 \sqrt{144 + 2x^2} = 216.$$

Расстояние  $h$  точки  $O$  от плоскости:

$$h = \frac{3v}{\text{пл. } ABC} = 8.$$

35. Решить уравнение

$$\sin x = \cos \frac{1}{x}.$$

Очевидно,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x};$$

отсюда

$$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16}}{4}.$$

А. В. (Москва)

36. Из системы уравнений:

$$k^2 (y^2 + z^2) (x^2 + y^2) = y^2 z^2,$$

$$l^2 (z^2 + x^2) (y^2 + z^2) = z^2 x^2,$$

$$m^2 (x^2 + y^2) (z^2 + x^2) = x^2 y^2,$$

определить зависимость между  $k, l, m$ .

Из последнего уравнения находим  $y^2$ :

$$y^2 = \frac{m^2 x^2 (z^2 + x^2)}{x^2 - m^2 (z^2 + x^2)}.$$

Подставляя это выражение вместо  $y^2$  в первое и второе уравнения, приводим их к виду

$$k^2 x^2 [x^2 z^2 + m^2 (x^4 - z^4)] = m^2 z^2 (z^2 + x^2) [x^2 - m^2 (z^2 + x^2)]$$

$$l^2 (z^2 + x^2) [m^2 (x^4 - z^2) + x^2 z^2] = x^2 z^2 [x^2 - m^2 (z^2 + x^2)]. \quad (1)$$

Деля последнее уравнение на предыдущее, получаем

$$\frac{l^2 (z^2 + x^2)}{k^2 x^2} = \frac{x^2}{m^2 (z^2 + x^2)},$$

откуда

$$(z^2 + x^2)^2 = \frac{k^2 x^4}{m^2 l^2},$$

или

$$z^2 + x^2 = \frac{kx^2}{ml}.$$

Здесь  $k, l, m$  предполагаются положительными.

Перенеся все члены в левую часть и совершив циклическую перестановку букв  $x, y, z$  одновременно с циклической перестановкой букв  $k, l, m$ , получим систему трех уравнений, равносильную первоначальной системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} z^2 + \left(1 - \frac{k}{ml}\right) x^2 &= 0, \\ x^2 + \left(1 - \frac{l}{km}\right) y^2 &= 0, \\ y^2 + \left(1 - \frac{m}{lk}\right) z^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



38. Найти корни уравнения  $[(ax - b) - (ax - b)! + 1]! + (ax - b)! = (ax - b)! + 1$ .

Положим  $ax - b = t$ ; получаем:  $[t - t! + 1]! + t! = t + 1$ , или  $[t - t! + 1]! = t - t! + 1$ . Сократив  $(t - t! + 1)(t - t! + 1 = 0$  дает  $t = 1$ ), имеем  $(t - t!)! = 1$ .

Отсюда  $t = 1$  или  $t = 2$ . Значит  $x_1 = \frac{b+1}{a}$ ,  $x_2 = \frac{b+2}{a}$ .

Городов (Кадиевка)

39. Решить в целых числах уравнение  $2^x + 1 = y^z$ .

Числа  $x$  и  $z$  не могут быть отрицательными, т. к. в противном случае в левой части равенства стояла бы неправильная дробь, а в правой части — правильная. Столь же легко убедиться, что  $y$  может быть отрицательным лишь при четном  $z$ .

Перепишем уравнение в виде

$$2^x = y^z - 1, \quad (1)$$

или

$$2^x = (y - 1)(y^{z-1} + y^{z-2} + y^{z-3} + \dots + 1).$$

Правая часть должна иметь множителями только степени числа 2 (так как левая часть равна  $2^x$ ). Следовательно,  $y$  — число нечетное (ибо  $y - 1$  — степень двух). Второй множитель правой части состоит из нечетных членов, величина же этого множителя — степень двух, следовательно, число членов второго множителя правой части четное и число  $z$  — четное (случай  $z = 1$  рассмотрим позднее). В таком случае методом группировки второй множитель поддается дальнейшему разложению:

$$2^x = (y - 1)(y + 1)(y^{z-2} + y^{z-4} + \dots + 1).$$

Аналогично рассуждая, найдем, что последний множитель правой части снова содержит четное число членов и разлагается на множители. Продолжая так далее, найдем

$$2^x = (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1)(y^4 + 1) \dots \quad (2)$$

Все множители правой части — степени двух. Число множителей зависит от величины  $z$ . Ясно, что  $z$  не равно нулю; ибо в противном случае уравнение (1) принимает вид:  $2^x = 0$ .

Положим  $z = 1$ . Тогда правая часть уравнения (2) имеет один множитель  $y - 1$  и уравнение (1) имеет вид  $2^x = y - 1$ ; отсюда  $y = 2^x + 1$ . Получаем систему решений:  $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $y = 2^x + 1$ ;  $z = 1$ .

Пусть  $z > 1$ . Тогда уравнение (2) имеет в правой части два или более множителя. Заметим, что  $(y - 1)$  отличается от  $(y + 1)$  на 2 единицы. В то же время  $(y - 1)$  и  $(y + 1)$  — степени числа 2. Следовательно,  $y + 1 = 2^k(y - 1)$ , или  $y = \frac{2^k + 1}{2^k - 1} = 1 + \frac{2}{2^k - 1}$ .  $y$  принимает единственное целое значение 3 (при  $k = 1$ )

Итак,  $y = 3$  (а так как  $z$ , как мы видели выше, четное, то возможно и  $y = -3$ )

Положив во (2)  $y = 3$ , видим, что уже третий множитель  $y^8 + 1$ , равный 10 не является степенью 2. Таким образом правая часть уравнения (2) может иметь только 2 множителя и, значит,  $z = 2$ .

Уравнение (1) принимает вид

$$2^x = (\pm 3)^2 - 1 = 8; \quad x = 3.$$

Получается решение  $x = 3$ ,  $y = \pm 3$ ,  $z = 2$ .

40. Доказать, что если в треугольнике имеет место соотношение

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

то он прямоугольный.

Так как  $A + B + C = 180^\circ$ , то  $\cos C = -\cos(A + B)$ . Рассматриваемое равенство после переноса последнего члена в правую часть принимает вид

$$\cos^2 A + \cos^2 B = \sin^2(A + B),$$

или

$$\cos^2 A + \cos^2 B = \sin^2 A \cos^2 B + \cos^2 A \sin^2 B + 2 \sin A \sin B \cos A \cos B.$$

Перенесем все члены в левую часть; после очевидных преобразований, получим

$$2 \cos^2 A \cos^2 B - 2 \sin A \sin B \cos A \cos B = 0,$$

или

$$\cos A \cos B \cos (A + B) = 0.$$

Отсюда следует: либо  $\cos A = 0$ , тогда угол  $A$  — прямой; либо  $\cos B = 0$ , тогда угол  $B$  — прямой; либо, наконец,  $\cos (A + B) = 0$ , тогда  $A + B = 90^\circ$  и, следовательно, угол  $C$  — прямой.

А. В. (Москва), Г о р о д о в (Кадневка)

---

# П И С Ь М А Ч И Т А Т Е Л Е Й

В выпуске первом „Математического просвещения“ Р. Н. Бончковский поместил заметку, в которой произвел, руководствуясь геометрическими соображениями, суммирование одного ряда. Здесь я хочу указать на возможное обобщение вопроса.

Пусть дана арифметическая прогрессия

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$$

и пусть требуется найти выражение для суммы  $S$  такого рода:

$$S = a_1 a_2 a_3 \dots a_k + a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1} + \dots + a_n a_{n+1} \dots a_{k+n-1}$$

или:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

если

$$u_n = a_n a_{n+1} \dots a_{k+n-1}$$

Для решения этой задачи возьмем другой ряд, члены которого суть

$$v_1 = a_0 a_1 a_2 \dots a_k;$$

$$v_2 = a_1 a_2 a_3 \dots a_{k+1};$$

$$v_3 = a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+2};$$

$$v_{n+1} = a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{k+n}.$$

и пусть

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{n+1} = A.$$

Легко видеть, что если  $d$  есть разность прогрессии, то

$$v_2 - v_1 = u_1 (a_{k+1} - a_0) = (k+1) du_1;$$

точно так же

$$v_3 - v_2 = u_2 (a_{k+2} - a_1) = (k+1) du_2.$$

$$v_4 - v_3 = u_3 (a_{k+3} - a_2) = (k+1) du_3.$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_{n+1} - v_n = u_n (a_{k+n} - a_{n-1}) = (k+1) du_n.$$

Складывая эти равенства, получим:

$$A - v_1 - (A - v_{n+1}) = (k+1) d (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n),$$

откуда

$$S = \frac{v_{n+1} - v_1}{(k+1)d}.$$

Например, если

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (k+1) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (k+2) + \dots \\ \dots + (n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n,$$

то

$$v_{n+1} = (n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n(n+1)$$

$$v_0 = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k = 0 \text{ и } d = 1.$$

$$S = \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n(n+1)}{k+1}.$$

В. А. Акишин (Москва)

В сборнике задач по высшей математике под редакцией Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина, ч. 3-я, ГТТИ, 1933 г. на странице 216 под № 7 имеется задача. Из колоды берется 6 карт. Требуется определить вероятность  $P$  того, что среди этих карт будут представительницы всех четырех мастей.

Авторы приводят следующее решение:

Подсчитывается вероятность

$$1 - P,$$

при которой в числе взятых шести карт не появляются представительницы всех четырех мастей.

Берутся определенные три масти, и из них получается число случаев  $C_{33}^6$ .

Это число потом умножается на 4, принимая во внимание число сочетаний из четырех по три. Дальше получается

$$P = 1 - \frac{4C_{33}^6}{C_{52}^6}.$$

Между тем, это решение неверно.

Когда мы берем определенные три масти (допустим: пики, трефы и бубны, то из них можно получить комбинацию из шести „чистых“ пик. Но ясно, что эта же комбинация получается и при сочетании мастей (пики, трефы, червы) или (пики, бубны и червы). Таким образом указанная комбинация из шести пик засчитывается три раза.

Подобные комбинации, в которые входят карты только одной или двух мастей, считаются по несколько раз, что, естественно, увеличивает против истинного вероятность  $(1 - P)$  и, следовательно, уменьшает вероятность  $P$ .

#### Правильное решение

Мы вычисляем прямо вероятность  $P$ . Разбиваем ее на две взаимно-исключающие друг друга части  $P_1$  и  $P_2$ .

I. Три карты разных мастей и три карты четвертой масти:

$$P_1 = 4(C_{13}^1)^3 C_{13}^3.$$

II. Две масти имеют представительниц по одной карте и две масти — по две

$$P_2 = 6(C_{13}^1)^2 (C_{13}^2)^2.$$

Искомая вероятность

$$P = \frac{4(C_{13}^1)^3 C_{13}^3 + 6(C_{13}^1)^2 (C_{13}^2)^2}{C_{52}^6} = \frac{83\,486}{195\,755} = 0,42648\dots$$

Вычисление по авторской формуле дает:

$$1 - \frac{4C_{33}^6}{C_{52}^6} = \frac{1\,181}{3\,290} = 0,35897.$$

Отклонение достигает 7%.

Н. М. Зеликман (Кемерово)



# Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

Клейн Ф., *Элементарная математика с точки зрения высшей*, т. I. Перевод с немецкого под редакцией В. Ф. Кагана, 1933, М. и Л., ГТТИ, 469 стр., 6 руб., пер. 1 р. 25 к. 10 000 экз.

Клейн Феликс, *Элементарная математика с точки зрения высшей*, т. II. Геометрия. Перевод с третьего немецкого издания под редакцией Д. А. Крыжановского, М. и Л., ГТТИ 1934, и 444 стр., 7 руб., пер. 1 рубль, 10 000 экз.

Предлагаемая книга представляет собой второе издание знаменитых лекций Клейна. Феликс Клейн — один из крупнейших математиков конца XIX и начала XX столетия. Ему принадлежит ряд капитальных открытий в различных областях математики. Для математического творчества Клейна характерны широкие обобщения, устанавливающие неожиданные связи между удаленными друг от друга частями науки. Клейн весьма живо интересовался и вопросами преподавания математики как в высшей, так и в средней школе. С 90-х годов XIX века Клейн возглавлял широкое движение за реформу курса математики германской средней школы; одним из основных пунктов проекта реформы было введение анализа бесконечно малых в последних классах школы и вообще большее сближение преподавания математики в средней и высшей школ. С целью популяризации этих идей Клейном был прочитан в 1907/8 уч. году для будущих учителей средней школы специальный курс, воспроизведение которого и представляет собой предлагаемая книга. В этих лекциях был разобран ряд основных вопросов элементарной математики с тех точек зрения, на которых стоит современная наука. Живой и ясный ум Клейна, его способность к широким и глубоким обобщениям дали ему возможность сделать это с блестящим мастерством, соединенным с большим педагогическим искусством.

Широко освещаются связи между различными отделами математики, в живой и достаточно доступной форме дается понятие о самых глубоких идеях современной математики. Большое значение придает Клейн геометрической наглядности; многие из его геометрических иллюстраций представляют собой маленькие шедевры. Во всем сочинении настоятельно проводится мысль о необходимости не отрывать математики от ее приложений. Автор касается также целого ряда вопросов самой методики преподавания математики. Обширные литературные указания дадут читателю возможность расширить объем сведений по тем затронутым в книге вопросам, которые особенно привлекут его внимание.

Необходимо отметить, однако, что, увлекаясь красотой некоторых математических теорий, автор иногда переходит необходимую грань; отдельные места книги чрезмерно трудны и малодоступны для среднего читателя.

В книге трактуется и ряд вопросов методологического характера, однако здесь материалистические высказывания причудливо чередуются с идеалистическими. Поэтому к этим частям книги следует подходить с большой осторожностью, на что обращено внимание читателя в специальном предисловии от издательства.

Том I состоит из трех частей: 1-я посвящена арифметике, 2-я — алгебре 3-я — анализу бесконечно малых.

В главе I 1-й части после краткого введения, касающегося вопросов преподавания арифметики, разбираются основные законы арифметических действий и дается обзор современных теорий целых чисел.

Далее идет отступление в область практических приложений: дано подробное описание счетной машины (арифмометра) Bunsen's. В главе II 1-й части излагаются без углубления в детали основы теории отрицательных, дробных и иррациональных чисел; изложение сопровождается геометрическими иллюстрациями и интересными историческими сведениями.

Главы III и IV носят более серьезный характер; в них дано понятие об алгебраических и трансцендентных числах и о теории разложения простых дробей в периодические десятичные в связи с малой теоремой Ферма и с понятием о наименьшем показателе, к которому принадлежит число по данному простому модулю. Далее разбирается вопрос о разложении иррациональных чисел в непрерывные дроби: этому дана остроумная геометрическая иллюстрация с помощью „сети точек“ (Punktgitter).

Конец главы посвящен „великой теореме“ Ферма, в связи с которой даются изящный геометрический вывод выражений для пифагоровых чисел и теория деления окружности на равные части с помощью циркуля и линейки. Сообщив о результатах Гаусса в этом направлении, Клейн дает исчерпывающее, но достаточно элементарное доказательство того, что с помощью только циркуля и линейки нельзя разделить окружность на семь равных частей; на этом примере иллюстрируются столь характерные для современной математики „доказательства невозможности“. В главе IV, в связи с обыкновенными комплексными числами дается понятие об общей теории гиперкомплексных чисел и подробно излагается теория кватернионов; изложение главы IV и конца III уже довольно трудно. Кончается 1-я часть методологическим отступлением о трех основных стилях (направлениях) в математике.

2-я часть состоит из двух глав. В главе I трактуются вопросы численного решения уравнений, причем особое внимание уделяется различным графическим методам. Глава II посвящена теории алгебраических уравнений в области комплексных чисел; здесь Клейн частично излагает собственные исследования по теории уравнения икосаэдра; эта глава — самая трудная в книге и требует значительной математической подготовки.

3-я часть (анализ) — наиболее удачная. Здесь разбросано много весьма интересных идей, изложение же простое и доступное. Глава I 3-й части посвящена логарифму и показательной функции. Дана история развития понятия о логарифме в ее связи с изобретением дифференциального и интегрального исчисления.

Здесь Клейн, между прочим, бросает мысль о том, чтобы, следуя основаниям теории логарифмов, определить логарифмы как площадь равнобокой гиперболы (т. е. как интеграл); это было проведено впоследствии учеником Клейна Курантом в его курсе дифференциального и интегрального исчисления. Клейн считает возможным ввести такое понятие о логарифме даже в средней школе.

В конце главы излагается точка зрения современной теории функций, которая только и смогла окончательно преодолеть все возникавшие затруднения. Глава II (о гониометрических функциях) содержит весьма разнообразный материал. Здесь в связи с формулами Эйлера дана теория гиперболических функций, далее идут обширные исторические сведения по истории тригонометрических таблиц и подробная теория сферических треугольников Мебиуса (т. е. со стороны любой величины). Заканчивается глава теорией малых колебаний и в связи с ними рядами Фурье; последняя теория дает Клейну возможность затронуть и весьма важный для современной математики вопрос об общем определении понятия функции.

Глава III посвящена, собственно, исчислению бесконечно малых. Глава разбита на два раздела: в первом дана история развития основных идей анализа, а попутно высказывается ряд интересных мыслей по существу исчисления бесконечно малых; во втором трактуются в историческом аспекте теорема Тейлора в тесной связи с исчислением конечных разностей.

К книге даны два приложения. В первом полностью проводится доказательство трансцендентности чисел  $e$  и  $\pi$ ; это очень сложное и громоздкое доказательство не может, по моему мнению, представить слишком большого интереса для читателя. Гораздо доступнее второе приложение, где в популярной форме изложены основы теории множеств.

К третьему немецкому изданию по поручению Клейна Зейфартом были сделаны два дополнения; они даны и в настоящем втором издании перевода. Первое дополнение излагает ход развития  $r$ -формы преподавания математики в германской средней школе с 1900 по 1924 г., второе расширяет имеющиеся в тексте указания по математической и дидактической литературе; дополнение это представит интерес и для лиц, изучающих вопросы методологии математики.

Редактор перевода (проф. В. Ф. Каган) сделал очень много для облегчения пользования книгой.

Кроме большого количества примечаний, разбросанных по всему тексту, им даны два специальных дополнения, которые помогут читателю усвоить наиболее трудные разделы книги (главу II алгебры и теорию римановых поверхностей).

Том II лекций Клейна посвящен вопросам геометрии; по своему строению он несколько отличается от тома I. В томе I рассматривались некоторые отдельные, особо интересные вопросы алгебры и арифметики; том II носит более цельный характер и дает, по существу, обзор современной геометрии. С исключительным мастерством и с изумительной простотой и ясностью излагает Клейн самые глубокие и тонкие идеи геометрии; не вдаваясь в детали, он дает читателю полное представление о разбираемых теориях и о всем их значении. Начав с самых простых примеров, Клейн подводит, далее, читателя к пониманию вопроса во всей его общности. Столь характерные для Клейна удачные синтезы на первый взгляд как будто бы удаленных друг от друга проблем, в большой степени помогают читателю почувствовать единство всего здания геометрии. Много внимания уделяется историческим замечаниям и практическим применениям геометрии. Изложение живое, яркое, увлекающее; книга читается с огромным интересом. При всем этом она не является элементарной: для чтения ее требуются довольно широкие математические познания, примерно в размере университетского курса.

Первый раздел книги посвящен простейшим геометрическим образам. В начале раздела разобран вопрос о знаке геометрических величин (длины, площади, объема) и показано, как введение знака позволяет добиться при трактовке различных проблем геометрии большей общности и простоты. В виде приложения дано описание планиметра Амслера. В исторических примечаниях, отметив связанные с рассматриваемым вопросом работы Грассмана и Мебиуса, Клейн показывает, как на основе указанных идей Мебиус пришел к открытию односторонних поверхностей. Исходя из единого принципа определителей, указанного Грассманом, Клейн вводит затем понятия скользящего и свободного вектора, плоскостного элемента и т. д. Введение этих понятий позволяет ему добиться в изложении основ статистики твердого тела значительных упрощений. Классификация указанных геометрических образов проводится на основе характера изменения определяющих их чисел при преобразовании координат. Таким путем Клейн подводит читателя к тому пониманию идеи геометрического образа, которые играют решающую роль во всех самых общих построениях современной геометрии. В полной общности это сделано в третьем разделе, в связи с чем дано представление и об основах тензорного исчисления. В заключении первого раздела в качестве естественного развития изложенных выше идей дано понятие о векторной алгебре и векторном анализе. Здесь же дан краткий, но яркий очерк истории проективной геометрии.

Во втором разделе рассматриваются геометрические преобразования; в первую очередь аффинные преобразования. Указав основные свойства неособенных аффинных преобразований, Клейн изучает, далее, и особенные преобразования, поставив их в тесную связь с учением о параллельном проектировании. В таком же направлении проведено и рассмотрение проективных преобразований. Уделено особое внимание вопросу о поведении введенных ранее геометрических образов при аффинных и проективных преобразованиях. В главе, посвященной высшим точечным преобразованиям, рассмотрены преобразования обратными радиусами (инверсия), вопрос о картографических проекциях и намечены основные идеи топологии. Далее дано представление о коррелятивных и касательных преобразованиях. Последняя глава раздела содержит подробное изложение штаудовой теории мнимых геометрических элементов; из всех глав книги это наиболее специальная.

Систематике и обоснованию геометрии посвящен третий раздел книги. Здесь очерчены идеи эрлангенской программы; к пониманию их читатель подготовлен материалом, изложенным во втором разделе. Достаточно подробно освещен вопрос о проективной метрике Кэли и о включении метрической и аффинной геометрии в проективную. В основу систематики положена теория инвариантов линейных преобразований, основным понятием которой посвящен специальный параграф.

Из возможных путей к обоснованию геометрии у Клейна рассмотрены два. Первый дает построение геометрии на основе движений; этот путь, вполне естественный, особенно соответствует тем идеям, которыми пронизана вся книга. Второй путь — тот, который был принят Гильбертом. В связи с этим вторым путем намечены основные этапы истории аксиомы параллелей и неевклидовой геометрии и проведено проективное обоснование неевклидовой геометрии. В заключении дан довольно подробный критический разбор „Начал“ Эвклида; вопрос об аксиоме Архимеда иллюстрируется интересным примером неархимедовых величин (роговидные углы).

В приложении разобран ряд мелких вопросов. В частности, показано происхождение так называемого „правила Непера“ в сферической тригонометрии; здесь, как и во многих других местах книги, Клейн выступает против догматического дедуктивного способа изложения и настаивает на генетическом изложении, дающем представление о происхождении и развитии математических идей.

Специальный раздел книги дает очерк постановки преподавания геометрии в Англии, Франции, Италии и Германии.

Перевод книги сделан хорошо, чувствуется весьма внимательная и тщательная работа редактора перевода.

Книга Клейна может быть горячо рекомендована всем преподавателям математики высшей и средней школы; она представит большой интерес для учащихся, математических и физических отделений университетов и педагогических вузов, а также для всех лиц, интересующихся математикой. Чтение книги потребует труда, но его стоит затратить; живое и интересное изложение в большей степени поможет преодолеть все трудности.

Проф. Г. Б. Гуревич.

**А. И. Перельман, Занимательная алгебра, изд. 2, исправленное и дополненное, ОНТИ, Л. М., 1934.**

Рецензируемая книга с внешней стороны настолько хорошо издана — рекламная обложка, хорошая бумага, прекрасные рисунки и занимательный текст, — что невольно располагает читателя в свою пользу. Тот материал, который с трудом воспринимается, когда он изложен на серой странице обычного учебника или должен быть заучен школьником к завтрашнему уроку, может быть гораздо легче и лучше усвоен, если он сопровождается забавной путткой. Такие отрывки книги, как „Необычайное лекарство“ (стр. 15) или „Логарифмы на эстраде“ (стр. 219), повтому чрезвычайно полезны. Десятки тысяч школьников и других читателей с пользой будут читать такие отрывки, и потому, при отсутствии в данное время на рынке других популярных книжек надо приветствовать появление „Занимательной алгебры“. Однако именно потому, что эта книжка рассчитана на массовое распространение, надо внимательно отнестись к ее внутреннему содержанию.

Распределение материала по отдельным операциям алгебры следует признать удачным.

**Глава I.** Материал, посвященный действиям над степенями, интересен. На соединениях (стр. 11—14) стоило бы остановиться подробнее. Такие отрывки, как „Три одинаковыми цифрами“, очень полезны, так как развивают понимание непосредственного счета. Отрывок „Универсальная библиотека“ и др. (стр. 25—45) сильно растянуты.

**Глава II.** Первые задачи (стр. 46—54) мало отличаются от обычных школьных. Отрывок „Курьезы и неожиданности“ (стр. 68—70), касающийся вопросов о несовместности системы уравнений и об уравнении — тождестве, слишком

мало обработан. В отрывке „В парикмахерской“ — название надуманное. Задачи „Трамвай и пешеход“ (стр. 72) и „На велодроме“ (стр. 78) допускают более простое решение. Очень удачна задача „Две жестянки кофе“ (стр. 73). Отрывок „Машины для решения уравнений“ (стр. 81) слишком краток и не может дать представления об этих машинах.

Глава III. Первые задачи (стр. 84—96), хотя и старые, но весьма полезны как дополнение к школьному курсу. Отрывок „Из тайн эратосфенова решета“ (стр. 97) чрезвычайно интересен. Пожалуй, это — лучшее место всей книжки: этот отрывок дает выход в более широкую область (теорию чисел). Отрывок „Ответственный расчет“ (стр. 101), касающийся приближенных вычислений, слишком краток; здесь следовало бы дать еще ряд примеров.

Глава IV слабо разработана. В задаче „Покупка шляпы“ (стр. 109) дан прекрасный рисунок шляпы и кредитных билетов, но самое решение на двух страницах дано в сухой и трудно понимаемой форме, и здесь читателю приходится самому выходить из затруднений. Популяризатор должен облегчить читателю понимание именно трудных мест, например: уяснить ему сущность неопределенного уравнения, роль произвольного параметра и т. п. Здесь можно было бы, например, дать график целочисленных точек на плоскости, показать, что решение дается прямой линией, проходящей через ряд точек (пар целых чисел), и показать, что ряд этот неограниченный. Мало пользоваться готовым аппаратом алгебры, надо постараться вскрыть перед читателем его структуру.

Задачи „Обмен часовых стрелок“ сама по себе интересна, и не было надобности привлекать Эйштейна. И здесь решение дается чисто формальное. У читателя, например, может возникнуть следующее вполне законное сомнение: если большая стрелка прошла  $u$  делений, то ведь этим вполне определяется число часов  $x_1$ : для этого достаточно разделить число  $u$  на 5 и взять число целых единиц этой дроби. Почему же  $x_1$  появляется как новое неизвестное? На стр. 128 неправильно указано, что пара значений  $x=12$ ;  $x_1=12$  дает то же, что и пара  $x=0$ ;  $x_1=0$ ; на самом деле таким свойством обладает пара значений  $x=11$ ;  $x_1=11$ . Далее, на стр. 129, неправильно указано, что имеется всего 144 решения и что их можно получить, разделив окружность на 144 равных частей. Это очень трудное место совсем не объяснено. Так как начальная точка циферблата дает решение, то, повидимому, точки деления попали бы на все точки целых часов. Между тем совершенно ясно, что такие точки не могут дать решений. Действительное число решений равно 143 (144-е совпадает с первым). Уяснить, где находятся эти точки, как можно увидеть их из формул для  $v$  и  $x$ , почему здесь два свободных параметра, — одним словом, дать развернутый анализ решения задачи — вот в чем состояла обязанность автора, и он ее совсем не выполнил.

Глава V. Задачи „Что больше“ (стр. 140) очень полезны. Задачи „Чему это равно“ (стр. 141) теоретически необоснованы. Оперирование с выражением, содержащим бесконечную цепь радикалов, заключенных друг в друга, имеет смысл лишь тогда, когда определен закон составления последовательности, предел которой рассматривается как значение этого выражения. Если же такой оговорки не сделаю, то оперирование с подобной цепью радикалов теряет всякий смысл.

Глава VI. В задаче „Рукопожатие“ (стр. 147) автор заявляет, что с уравнениями второй степени приемами арифметики справиться не удастся. Этими словами как бы ставится стена между „более слабой“ арифметикой и „более сильной“ алгеброй, которая тут же иллюстрируется весьма неудачным примером. На такие задачи, как решение уравнения  $n(n-1)=132$ , у арифметики сил еще хватит!

Задачи „Пчелиный рой“ (стр. 149) и „Стая обезьян“ носят искусственный характер.

На стр. 152 под рекламным названием „Задача Эйлера“ помещена задача о двух крестьянках, продающих яйца, с цитатой из Стендаля: „Я понял, что значит пользоваться орудием, называемым алгеброй“. Между тем, для этой задачи арифметическое решение проще алгебраического. Пусть отношение количества яиц первой к количеству яиц второй равно  $k:1$ . Тогда цена, по которой продавала первая, относится к цене, по которой продавала вторая, как  $1:k$ .

Следовательно, предположительные выручки находились бы в отношении  $k^2 : 1$ ;

то же отношение равно  $15 : 6 \frac{2}{3} = 15 : \frac{20}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$ , откуда  $k = \frac{3}{2}$ .

В книжке, имеющей целью развить сметливость и остроумис, следовало бы дать параллельно и арифметическое и алгебраическое решения.

Решение задачи „Два поезда“ на отыскание минимума (стр. 163) носит искусственный характер. Решение основано на том, что  $x$  не может быть минимым,— аргументация слабая и неясная. Между тем имеются другие более простые и понятные способы решения задачи: выделение полного квадрата, график функции и т. д. Следующие две задачи решены тем же приемом. Прием решения, указанный на стр. 172, интересен и полезен. В конце главы следовало бы указать на то, что для решения подобных задач существуют другие, общие методы. Этим самым внимание читателя было бы направлено в должную сторону.

Глава VII. Задачи, связанные с размножением (стр. 197—205), занимают слишком много места.

Глава VIII содержит хорошо написанный очерк о логарифмах (стр. 210—215); частный вопрос, поставленный в самом начале главы, не связанный с остальным текстом, вызывает недоумение. Очень интересна и полезна статья „Логарифмы на эстраде“. В этой, вообще говоря, интересной главе некоторые места кажутся странными. Например, на стр. 234 написано, что наращенный капитал стремится к пределу 271 р. 83 к. Замечания на следующей странице о том, что  $e$  есть число иррациональное и трансцендентное, плохо вяжутся с этой цифрой. Сообразуясь с огромным значением числа  $e$ , следовало бы побольше остановиться на нем и подробнее разъяснить понятие предела.

Вопрос, решаемый на стр. 236, слишком труден, да и объяснения к нему недостаточны. Задача „Два корня“ (стр. 238) очень полезна, но и здесь было бы полезно воспользоваться графиком. В статье „Сколько людей жило на свете“ (стр. 239) спор с поэтом Бенедиктовым довольно беспочвенный.

Просмотрев, таким образом, всю книгу, можно сказать, что автор преподнес материал в занятой и интересной форме; язык книги — легкий, удобочитаемый. С этой стороны книга стоит на должной высоте. Но, к сожалению, над материалом, который имелся под руками автора в огромном изобилии, автор поработал мало. Указанная в предисловии цель „воскресить в памяти и закрепить разрозненные и непрочные сведения читателя“ в значительной мере достигается. Но в предисловии указывается еще одна цель: „воспитать в читателе вкус к занятиям алгеброй“. Эта цель достигается лишь в слабой степени. Вопросы теоретические не прорабатываются. Правда, в своем предисловии автор указывает, что он „избегает трудных теоретических вопросов, вдаваясь больше вширь, чем вглубь“, но эту отписку мы принять не можем.

Книга не дает выхода в более высокие разделы математики: ничего не говорится о функциональной зависимости (это в 1934 г!), нет совсем графиков, нет пояснения понятия о пределе. Автор пользуется готовыми формулами алгебры, как это делалось когда-то в гимназиях. Книга действительно остается в рамках „элементарной“ математики, но эти рамки — школьные. Конечно, можно давать нетрудный материал, но в нем должны содержаться идеи, послужившие к дальнейшему развитию математики. Без такого выхода (Ausblicke, как говорят немцы) в более высокую сферу излагаемый в книге материал приобретает застывший вид, и читатель не видит ничего за узким горизонтом формулы решения квадратного уравнения.

Было бы желательно, чтобы автор подвергнул свою книгу тщательной переработке, тогда она была бы действительно полезной. Необходимо создать дальнейшие, более глубокие по содержанию выпуски „занимательной алгебры“. Еще более радикальным средством популяризировать математику и добиться широкого распространения математических знаний было бы создание математического журнала для молодежи. В этом отношении мы очень отстали. Парижский „Journal de mathématiques élémentaires“ имеет надпись: „59-й год издания“.

## ОТ РЕДАКЦИИ

Редакция сборников «Математическое просвещение», стремясь приблизить сборники к запросам читателей, просит каждого из читателей прислать в редакцию следующие сведения:

- |                           |   |                         |
|---------------------------|---|-------------------------|
| 1. Фамилия, имя, отчество | } | сообщать необязательно. |
| 2. Адрес                  |   |                         |
| 3. Образование            |   |                         |
| 4. Профессия              |   |                         |
| 5. Возраст                |   |                         |

Вместе с этими сведениями редакция просит сообщить подробное мотивированное мнение о сборниках, с указанием как положительных, так и отрицательных их сторон, а также желательные изменения в их направлении, темы статей, задач и т. д. Всякое полезное предложение будет использовано в дальнейшей работе.

Редакция обращается с этой просьбой ко всем читателям, независимо от того, являются ли они постоянными покупателями сборников или пользуются ими в библиотеке.

*Редакция.*

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
А. Д. Ванюшин. Построения икосаэдра и додекаэдра . . . . .	4
С. И. Зетель. Свойства треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию . . . . .	12
Р. Н. Бончковский. Покрывание плоскости квадратами, шестиугольниками и звездчатыми двенадцатиугольниками . . . . .	21
С. Е. Аршон. Некоторые свойства арифметических пропорций . . . . .	24
А. В. Грошев. О наилучших приближениях иррациональных чисел . . . . .	28
Л. Я. Окунев. Основная теорема алгебры . . . . .	39
Д. И. Перепелкин. Поверхности второго порядка как геометрические места точек . . . . .	49
А. С. Кованько. Обобщенная формула конечного приращения для функций многих переменных . . . . .	55
П. И. Романовский. Бесконечные сверхстепени . . . . .	57
Н. В. Наумович. Построения, выполняемые односторонней линейкой, если задана дуга конического сечения, центр и фокус которого известны . . . . .	71
И. Б. Абельсон. Кривые постоянной ширины . . . . .	80
В. А. Кудрявцев. Об интегрируемости уравнения $\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^n$ . . . . .	83
М. П. Черняев. Аналитическое доказательство теоремы Данделена . . . . .	88
Д. М. Синцов. Приближенная замена цепной линии параболой или эллипсом . . . . .	93
Д. М. Синцов. Об одной геометрической задаче . . . . .	96
И. А. Шорохов. Графический способ решения уравнений четвертой степени . . . . .	99
П. П. Андреев. О повышении степени табулируемости при построении таблиц логарифмов . . . . .	100

## ИСТОРИЯ

В. В. Горячкин. Очерк по истории математики в Японии . . . . .	104
--	-----

## МЕТОДИКА

Л. Р. Об одной формуле Эйлера . . . . .	117
М. М. Вайнберг. Применение интегрирующего множителя к нахождению общего интеграла линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	119

## ЗАДАЧИ

ЗАДАЧИ . . . . .	124
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ . . . . .	127
ПИСЬМА ЧИТАТЕЛЕЙ . . . . .	134
БИБЛИОГРАФИЯ . . . . .	136